

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

Kristina Marković

**ANALIZA KONSTRUKCIJSKIH
PARAMETARA ROTACIJSKIH
PODATLJIVIH MEHANIZAMA S
LISNATIM OPRUGAMA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Rijeka, 2015.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

Kristina Marković

**ANALIZA KONSTRUKCIJSKIH
PARAMETARA ROTACIJSKIH
PODATLJIVIH MEHANIZAMA S
LISNATIM OPRUGAMA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor: prof. dr. sc. Saša Zelenika

Rijeka, 2015.

UNIVERSITY OF RIJEKA
FACULTY OF ENGINEERING

Kristina Marković

**ANALYSIS OF INFLUENCING
PARAMETERS IN THE DESIGN OF
CROSS – SPRING PIVOTS**

DOCTORAL THESIS

Rijeka, 2015.

Mentor rada: prof. dr. sc. Saša Zelenika, mag. ing. mech.

Doktorska disertacija obranjena je dana 20.03.2015. na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, pred povjerenstvom u sastavu:

1. prof. dr. sc. Dubravka Siminiati, mag. ing. mech., predsjednica
2. prof. dr. sc. Saša Zelenika, mag. ing. mech., mentor, član
3. prof. dr. sc. Nenad D. Pavlović, dipl. ing., član, (Mašinski fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija)

mami i tati, e da ste tu...

Mariju, seki, Miji, Franu, obitelji i prijateljima, jer ste tu...

We can't solve problems by using the same kind of thinking we used when we created them

Albert Einstein (1879 – 1955)

Zahvale

Mentoru prof. dr. sc. Saši Zeleniki zahvaljujem na pruženoj potpori, sugestijama, pristupačnosti, pomoći tijekom prikupljanja literature te neograničenom strpljenju pri izradi i oblikovanju disertacije. Osobito mi je važno bilo što me je uključio u istraživački tim i tako omogućio ostvarenje rezultata u ovom izuzetno interesantnom znanstvenom području.

Zahvaljujem prof. dr. sc. Dubravki Siminiati i prof. dr. sc. Nenadu Pavloviću na uloženom trudu pri pregledavanju disertacije te sugestijama koje su rad učinile boljim.

Također zahvaljujem prof. dr. sc. Francescu de Boni i prof. dr. sc. Mirceu Gh. Munteanu sa Sveučilišta u Udinama koji su mi za boravka na njihovoj instituciji dodatno približili područje istraživanja.

Svim kolegicama i kolegama, a posebno Marini i Robiju iskazujem zahvalnost na podršci i savjetima te kolegi Željku koji mi je uvelike pomogao preuzimanjem dijela mojih obveza.

Zahvaljujem članovima svoje obitelji koji su od početka vjerovali u moj uspjeh i bili puni razumijevanja i podrške u svim trenucima. Seki koja je uvijek bila tu i mojim klincima Miji i Franu.

Posebno zahvaljujem suprugu Mariju jer mi je pružio beskrajnu podršku, strpljenje i pomoć.

Autorica

Sažetak

Podatljivi mehanizmi, kod kojih se barem dio pokretljivosti ostvaruje elastičnom deformacijom podatljivih dijelova, su alternativa mehanizmima temeljenim na klizanju i kotrljanju koji služe za prijenos gibanja, snage ili sile. Podatljivi mehanizmi u širokoj su uporabi u konstrukcijskom strojarstvu, preciznom inženjerstvu, tehnologiji mikro- i nanosustava te u svakodnevnom životu.

U doktorskoj disertaciji analiziraju se konstrukcijski parametri različitih konfiguracija rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama. Osnovni ciljevi koji se postavljaju pri konstruiranju takvih mehanizama su: što veća rotacijska preciznost i točnost, što manja varijabilnost rotacijske krutosti, stabilnost, jednostavnost konstrukcije i pouzdanost.

Budući da se razmatrani mehanizmi temelje na lisnatim oprugama, osnova predviđanja njihovog ponašanja upravo je analiza karakterističnih parametara lisnatih opruga. Kako bi se provela analiza konstrukcijskih parametara simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama opterećenih momentom, u okviru doktorske disertacije razvijen je analitički model lisnatih opruga na polju velikih (geometrijski nelinearnih) deformacija primjenom tzv. *Elastica* metode kao i numerički model metodom konačnih elemenata. S ciljem utvrđivanja točnosti numeričkog modela pri analizi ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama, rezultati dobiveni tim modelom uspoređeni su s eksperimentalnim mjerenjima dostupnima u literaturi. Da bi se pak odredile granice primjenjivosti analitičkih metoda proračuna u ovisnosti o zahtijevanom stupnju točnosti, rezultati analitičke simulacije naprezanja i deformacija razmatranih mehanizama uspoređeni su zatim s rezultatima dobivenim metodom konačnih elemenata. Kako bi se potom optimizirala konstrukcijska konfiguracija, odnosno identificiralo konstrukcijsko rješenje koje omogućuje minimizaciju parazitnih pomaka i varijabilnosti rotacijske krutosti mehanizma i pri većim kutovima rotacije, metodom konačnih elemenata analizirani su utjecaj kuta među lisnatim oprugama, točke presjecišta opruga te početne zakrivljenosti opruga. Na kraju disertacije provedena je i analiza utjecaja vanjskih opterećenja na varijabilnost rotacijske krutosti i na veličinu parazitnih pomaka.

Rezultati dobiveni u doktorskoj disertaciji omogućuju ne samo vrednovanje utjecaja konstrukcijskih parametara na ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama, odnosno utjecaja tih parametara na rotacijsku krutost te točnost mehanizma, nego i stvaraju preduvjete za razvoj nove klase rotacijskih podatljivih mehanizama ultravisokih preciznosti i točnosti sa širokim poljem primjene u industrijskoj i konstrukcijskoj praksi.

Abstract

Compliant mechanisms, that gain at least part of their mobility from the deflection of flexible members, are an alternative to conventional sliding and rolling mechanisms used to transfer motion, power or force. Compliant mechanisms are nowadays widely used in mechanical engineering design, precision engineering as well as the micro- and nanosystems technologies. Parameters influencing the design of different configurations of cross-spring pivots are analysed in this doctoral thesis. In fact, the main goals in their design are: achieving the highest possible accuracy and precision, achieving the lowest possible variability of rotational stiffness, stability, design simplicity and reliability.

Since the considered mechanisms are constituted by spring-strips, the prediction of their behaviour is to be based on the analysis of the characteristic parameters of the strips themselves. In order to analyse the influencing parameters in the design of symmetrical cross-spring pivots loaded by a pure couple, an analytical model of the behaviour of spring-strips in the field of large (geometrically nonlinear) deflections based on the *Elastica* method, as well as a numerical model based on the finite elements method, are hence developed in the thesis. In order to assess the applicability of the developed numerical model in predicting the stress-strain behaviour of the considered mechanisms, results obtained numerically are compared with experimental data available in literature. With the goal of determining the limits of applicability of the approximated calculation methods depending on the needed accuracy, the results of the analytical calculations of the stress-strain behaviour of the cross-spring pivots are then compared with results obtained by using the finite element method. Numerical calculations are used next to optimise pivots' design by assessing the influence of the angle and the position of the intersection as well as of the initial curvature of the spring-strips,. A design solution allowing the minimisation of the parasitic shifts, as well as the minimisation of variability of the rotational stiffness, even for large rotations of the pivot is thus obtained. At the end of the thesis, an analysis of the influence of external loads on the variability of rotational stiffness and on the entity of the parasitic shifts is also performed.

The results obtained in the doctoral thesis allow thus not only assessing the influence of the design parameters in the design of cross-spring pivots (i.e. the influence of these parameters on rotational stiffness and the accuracy of the considered mechanisms), but also creating the preconditions for the development of a new class of ultra-high precision rotational compliant mechanisms with potentially broad applications in industrial and design praxis.

Ključne riječi

- Podatljivi mehanizam
- Lisnata opruga
- Nelinearni model
- Preciznost i točnost
- Parazitni pomaci
- Rotacijska krutost
- Optimizacija konstrukcijske konfiguracije

Key words

- Compliant mechanism
- Spring–strip
- Nonlinear model
- Accuracy and precision
- Parasitic motions
- Rotational stiffness
- Optimisation of design configuration

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Stanje u području istraživanja	5
2.1	Osnovni pojmovi	7
2.1.1	Dugi podatljivi elementi	7
2.1.2	Kratki podatljivi elementi	7
2.1.3	Složeni podatljivi mehanizmi	9
2.2	Analiza naprezanja i deformacija lisnatih opruga	15
2.3	Podatljivi mehanizmi s lisnatim oprugama	19
3	Matematička formulacija simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama	31
3.1	Koncept linearnih i nelinearnih progiba	31
3.2	Koncept krutosti i podatljivosti	34
3.3	<i>Elastica</i> metoda	36
3.3.1	Rješavanje jednadžbe elastične linije	38
3.3.2	Analitički model rješavanja rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama	41
3.4	Parazitni pomaci i stabilnost rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama	54
3.5	Proračunski algoritam	57
4	Približne analitičke metode rješavanja rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama	63

4.1	Metoda približne zakrivljenosti	64
4.1.1	Jednadžba elastične linije lisnate opruge opterećene vlačno	65
4.1.2	Jednadžba elastične linije lisnate opruge opterećene tlačno	67
4.1.3	Sile u lisnatim oprugama i rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma	69
4.2	Metode pseudo–krutog modela tijela	74
4.2.1	Modeliranje rotacijskog podatljivog mehanizma modelom zgloba sa svornjakom	75
4.2.2	Modeliranje rotacijskog podatljivog mehanizma modelom četveroštapnog mehanizma	83
4.3	Geometrijska metoda zglobnog četverokuta	93
5	Eksperimentalna mjerenja	99
5.1	Youngov eksperiment	100
5.2	Nickolsov i Wunschov eksperiment	103
5.3	Zelenikin i De Bonin eksperiment	106
5.3.1	Provedba eksperimentalnih mjerenja	106
5.3.2	Rezultati eksperimentalnih mjerenja	108
6	Numerički model simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizama	111
6.1	Modeliranje rotacijskog podatljivog mehanizma	111
6.2	Osnovne postavke za numeričku analizu	113
6.2.1	Umrežavanje modela mehanizma	113
6.2.2	Rubni uvjeti	117
6.2.3	Opterećenje rotacijskog podatljivog mehanizma	118
6.3	Očitavanje rezultata	118
6.3.1	Utjecaj antiklastičnog efekta	120
6.3.2	Parazitni pomaci	122
6.3.3	Najveća naprezanja u lisnatim oprugama	124
6.3.4	Stabilnost mehanizma	125
6.4	Provjera valjanosti i točnosti predloženog postupka numeričke analize	126
6.4.1	Analiza parazitnog pomaka	127
6.4.2	Analiza momenta i rotacijske krutosti mehanizma	129
7	Usporedba dobivenih rezultata	131
7.1	Izračun momenta i rotacijske krutosti	132
7.2	Izračun parazitnog pomaka	134

7.2.1	Normalizirana veličina parazitnog pomaka.....	134
7.2.2	Faza parazitnog pomaka	135
7.3	Izračun naprezanja	136
7.4	Granice primjenjivosti analitičkih metoda.....	138
8	Numerička analiza konstrukcijskih parametara	
	rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama	141
8.1	Ovisnost naprezanja i deformacija o kutu α	142
8.2	Ovisnost naprezanja i deformacija o položaju presjecišta lisnatih opruga	147
8.3	Ovisnost naprezanja i deformacija o početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga ..	154
8.4	Naprezanja i deformacija monolitne izvedbe rotacijskog podatljivog mehanizma.....	159
8.5	Naprezanja i deformacije mehanizama u ovisnosti o vrsti vanjskoga opterećenja	165
8.6	Analiza dobivenih rezultata	174
9	Zaključak	177
10	Popis literature.....	185
11	Popis oznaka i indeksa	191
12	Popis slika i tablica	195
13	Prilozi.....	205
13.1	<i>Elastica</i> metoda.....	206
13.2	Metoda približne zakrivljenosti	209
13.3	Metoda pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom.....	209
13.4	Metoda pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma	210
13.5	Geometrijska metoda zglobnog četverokuta.....	212

1 Uvod

Podatljivi mehanizmi s lisnatim oprugama u širokoj su uporabi u konstrukcijskom strojarstvu, preciznom inženjerstvu, mikro- i nanotehnologijama te u svakodnevnom životu. Doista, takvi mehanizmi primjenjuju se u mjeriteljstvu, seizmologiji, industriji poluvodiča, zrakoplovnoj i svemirskoj tehnologiji, astrofizici, automobilskoj industriji, obradnim strojevima, robotici, uređajima za manipulaciju, (bio)medicini te kućanskim aparatima i pomagalicama. Motivacija i povod za odabir tematike doktorske disertacije leži u činjenici da, unatoč rasprostranjenosti podatljivih mehanizama, postoji relativno malen broj radova koji sustavno pristupaju analizi konstrukcijskih parametara ovakve vrste mehanizama. Osnovni ciljevi koji se postavljaju pri konstruiranju rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama, na koje će se fokusirati doktorska disertacija, su čim veća rotacijska preciznost i točnost, čim manja varijabilnost rotacijske krutosti, stabilnost, jednostavnost konstrukcije i pouzdanost.

Osnovni elementi ovdje analiziranih rotacijskih podatljivih mehanizama su lisnate opruge pa je osnova definiranja tj. predviđanja ponašanja takvog zgloba analiza karakterističnih parametara samih lisnatih opruga, a to su krutost, reakcije u osloncima, naprezanja, progibi i sl. odnosno, uopćeno, analiza naprezanja i deformacija opruga. Iz analize karakterističnih parametara lisnatih opruga moguće je utvrditi ukupnu rotacijsku krutost mehanizma, kut rotacije mehanizma, stabilnost te rotacijsku preciznost i točnost. Rotacijska preciznost i točnost ovise o neželjenom parazitnom pomaku geometrijskog središta mehanizma u odnosu na početni položaj, dok negativni povratni moment u barem jednoj od lisnatih opruga dovodi do njenog izvijanja odnosno nestabilnosti mehanizma.

Definiranje karakterističnih parametara lisnatih opruga u području malih kutova rotacije relativno je jednostavno, a i središte rotacije mehanizma gotovo se poklapa s točkom u kojoj se križaju lisnate opruge u neopterećenom položaju, odnosno s geometrijskim središtem mehanizma. Problem se znatno komplicira u području većih kutova rotacije mehanizma, gdje se ulazi u područje geometrijskih nelinearnosti, kada dolazi do značajnijeg parazitnog pomaka.

U radu će se analizirati način modeliranja tretirane klase mehanizama s ciljem identifikacije konstrukcijskog rješenja koje i pri većim kutovima rotacije mehanizma omogućava male parazitne pomake i što manju varijabilnost rotacijske krutosti. Stoga, hipoteza glasi da će primjenom odgovarajuće metode proračuna i varijacijom parametara biti moguće pronaći konstrukcijsko rješenje koje minimizira parazitne pomake i varijabilnost rotacijske krutosti mehanizama i pri većim kutovima rotacije mehanizma.

U tom će se cilju analizirati i sintetizirati dosadašnje teorijske spoznaje i rezultati na području matematičkog modeliranja simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama opterećenih spregom sila (u daljnjem tekstu: momentom – engl. *couple* ili *pure moment*). Dostupne analitičke metode implementirat će se u programskom paketu MATLAB. Numerički model metodom konačnih elemenata će, pak, biti razvijen u programskom paketu ANSYS. Indukcijom će se odrediti granice primjenjivosti pojedinih metoda proračuna ovisno o traženom stupnju točnosti. Dobiveni rezultati će se validirati i usporedbom s eksperimentalnim mjerenjima dostupnima u literaturi. Zatim će se provesti i numerička analiza rotacijskih podatljivih mehanizama pri promjeni konstrukcijskih parametara poput kuta među lisnatim oprugama, točke presjecišta opruga te početne zakrivljenosti opruga, ali i poprečnog opterećenja mehanizma, a sve s ciljem utvrđivanja kako promjena konstrukcije i opterećenja utječu na rotacijsku krutost, stabilnost i točnost mehanizma.

Istraživanje bi trebalo rezultirati boljim razumijevanjem utjecaja konstrukcijskih parametara na ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama, odnosno utjecaja tih parametara na rotacijsku krutost i točnost mehanizma. Rad će omogućiti i definiranje konstrukcijskog rješenja koje minimizira pogreške i varijabilnost rotacijske krutosti, odnosno razvoj rješenja primjenjivog u konstrukcijskoj praksi.

Doktorska je disertacija podijeljena u devet cjelina. U drugoj će cjelini biti riječi o rotacijskim podatljivim mehanizmima, vrstama podatljivih elemenata od kojih se mehanizmi sastoje, njihovoj primjeni, prednostima i nedostacima u uporabi, a bit će dan i osvrt na dosadašnja

istraživanja podatljivih mehanizama s težištem na radovima koji se bave rješavanjem točne diferencijalne jednadžbe elastične linije i analizom karakterističnih parametara rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama.

U okviru disertacije će se zatim razviti analitički model rješavanja simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama opterećenog momentom temeljen na *Elastica* metodi. Analitički proračun će se implementirati u programskom paketu MATLAB.

Budući da se u literaturi navodi više približnih analitičkih metoda koje je moguće koristiti za izračun karakterističnih parametara rotacijskih podatljivih mehanizama, u četvrtom će se poglavlju disertacije prezentirati postavke metode približne zakrivljenosti, geometrijske metode i metode pseudo–krutog modela tijela. Za sve će se spomenute metode izraditi i zasebno programsko rješenje u programskom parketu MATLAB.

U literaturi su dostupna i eksperimentalna mjerenja provedena na simetričnim rotacijskim podatljivim mehanizmima s lisnatim oprugama pa će rezultati tih mjerenja biti prezentirani u petom poglavlju disertacije.

Provedba analize simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama metodom konačnih elemenata i dobiveni rezultati bit će opisani u šestom poglavlju, pri čemu će za analizu metodom konačnih elemenata biti korišten programski paket ANSYS. Predloženi numerički model, čija će točnost biti utvrđena usporedbom rezultata s eksperimentalnim mjerenjima opisanima u petom poglavlju disertacije, koristit će se da bi se provela analiza odstupanja vrijednosti karakterističnih parametara podatljivog zgloba dobivenih analitičkim metodama opisanima u trećem i četvrtom poglavlju disertacije. Usporedba rezultata bit će dana u sedmoj cjelini doktorske disertacije. Cilj dane analize određivanje je granica primjenjivosti pojedinih metoda proračuna ponašanja simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama opterećenih momentom.

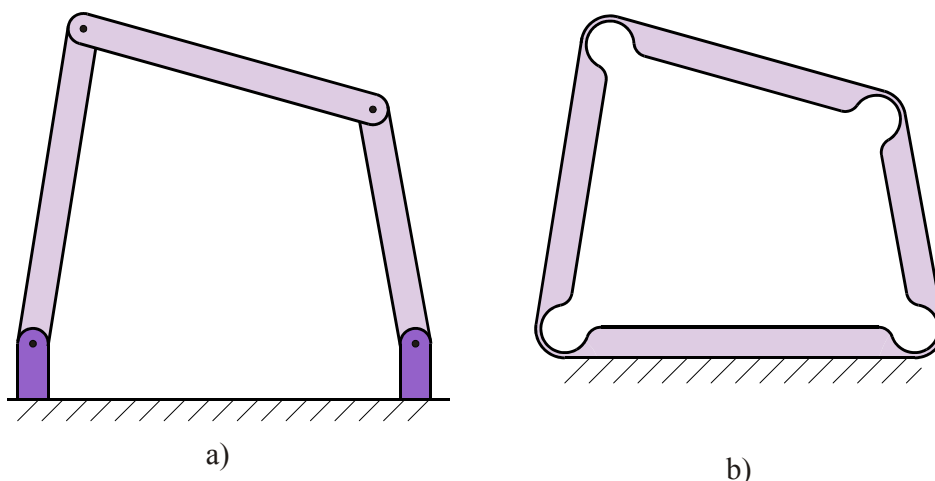
U osmoj će cjelini numerička analiza metodom konačnih elemenata biti proširena kako bi se utvrdilo ponašanje različitih konstrukcijskih izvedbi rotacijskih podatljivih mehanizama u primjeni. Analizirat će se tako sljedeće varijacije konstrukcijskih izvedbi: promjena kuta lisnatih opruga prema vertikali, pomicanje točke presjecišta lisnatih opruga, lisnate opruge s početnom zakrivljenošću, kao i monolitna te tzv. leptirasta izvedba rotacijskog podatljivog mehanizma. U osmom će se poglavlju, također, analizirati utjecaj djelovanja vanjskih vertikalnih sila (uz moment) na rotacijski podatljivi mehanizam. Cilj ove cjeline je određivanje konstrukcijske konfiguracije koja omogućava minimizaciju varijacije rotacijske

krutosti i parazitnih pomaka mehanizma i pri većim kutovima rotacije mehanizma.

U posljednjoj devetoj cjelini disertacije dan je zaključak kao i pogled na mogućnosti budućeg rada vezanog uz tematiku obrađenu u doktorskoj disertaciji.

2 Stanje u području istraživanja

Mehanizmi služe za prijenos sile, snage ili gibanja na način da se kruti dijelovi mehanizma povežu elementima koji omogućavaju relativno gibanje [Erdman, Sandor, 1997]. Za razliku od tradicionalnih mehanizama temeljenih na klizanju i kotrljanju, podatljivi mehanizmi dio svoje pokretljivosti ostvaruju elastičnim deformiranjem na način da se elastično deformiraju podatljivi elementi koji spajaju krute elemente. Na Slici 2.1 vidljiva je razlika između mehanizma koji se sastoji od krutih elemenata i tradicionalnih zglobova (a) i podatljivog mehanizma (b).



Slika 2.1 Tradicionalni (a) i podatljivi (b) mehanizam

Elastične deformacije podatljivih elemenata koriste se u preciznim instrumentima već više od tri stoljeća. Arheološki nalazi potvrđuju da se luk i strijela, koji su bili osnovno oružje u

mnogim kulturama, rabe još od osmog tisućljeća prije Krista koristeći svojstvo podatljivog elementa da skladišti energiju elastične deformacije i pretvara ju u gibanje strijele. Isto je svojstvo koristio i katapult (stara Grčka u četvrtom stoljeću prije Krista).

Prva znanstvena istraživanja podatljivih elemenata proveo je Galileo Galilei ispitujući deformacije uklještene konzole opterećene silom dok su temelje teorije linearne elastičnosti postavili R. Hooke i Marrot. Teoretsku podlogu na kojoj se temelji današnja postavka teorije elastičnosti definirali su A. Coushy, B. Saint – Venant i W. Thompson (kasnije Lord Kelvin). Važan period u kojem su podatljivi elementi bili instrument znanstvenog napretka bio je razvoj galvanometra. Konstruktori uključeni u rani razvoj preciznih instrumenata bili su H. von Helmholtz, J. P. Joule, Lord Kelvin, J. C. Maxwell i W. E. Weber [Smith, 2000].

Podatljive mehanizme moguće je podijeliti na potpuno podatljive mehanizme, kod kojih se cjelokupno gibanje ostvaruje elastičnom deformacijom elemenata, te na mehanizme koji imaju barem jedan tradicionalni zglob (kinematski par) i nazivaju se djelomično podatljivima.

Podatljivi mehanizmi imaju višestruke prednosti u odnosu na tradicionalne mehanizme temeljene na klizanju i kotrljanju, a neke od njih su:

- omogućuju visoku točnost, preciznost i razlučivost,
- imaju neznatnu histerezu,
- nema dodira između dijelova koji su u relativnom gibanju pa nema habanja, ni utjecaja trenja (zagrijavanja), posljedično, nije ih potrebno podmazivati te ne može doći do 'zaglavljivanja' mehanizma,
- ne iziskuju održavanje u radu pa se mogu upotrebljavati u gotovo svim radnim uvjetima (prisutnost radijacije, visoke i kriogene temperature te agresivna, prljava ili ultračista okolina),
- iziskuju manji broj dijelova što pojeftinjuje izradu i montažu, konstrukcija je jednostavna, kompaktna i pouzdana, pa čak mogu biti izrađeni i iz jednog dijela (monolitna izvedba).

Nedostaci ovakvih mehanizama su, pak:

- ograničeni pomaci i opterećenje,
- složena kinematika,
- prisutnost neželjenih parazitnih pomaka,
- velika ovisnost o svojstvima materijala koja uvelike utječu na radna svojstva,
- velik broj promjena opterećenja iziskuje zahtjevnu analizu zamora materijala radi

predviđanja životnog vijeka mehanizma,

- pojava povratnih sila, mada u nekim mehanizmima to može biti i prednost jer nije potreban dodatni opružni element.

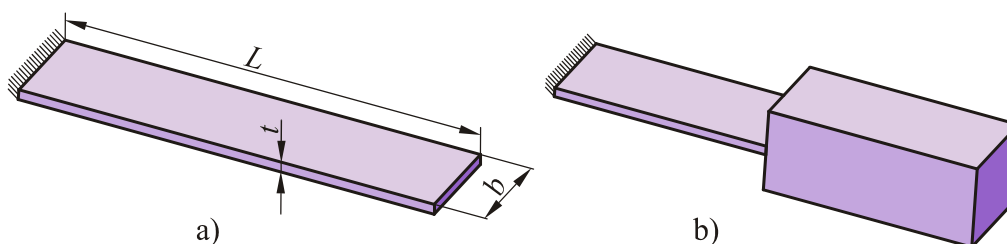
2.1 Osnovni pojmovi

Podatljivi elementi integriraju se u mehanizme kako bi se ostvarilo unaprijed definirano gibanje koje je posljedica djelovanja opterećenja, te se mogu svrstati u dvije osnovne grupe: jednostavne i složene podatljive elemente. Jednostavni podatljivi elementi dijele se na duge i kratke. Česte su izvedbe koje čine kombinaciju istih, a spadaju u skupinu složenih zglobova. Iz grupe složenih zglobova u uporabi su najčešće rotacijski i translacijski mehanizmi s lisnatim oprugama, torzijski zglobovi te monolitni rotacijski mehanizmi [Smith, 2000], [Howell, 2001].

2.1.1. Dugi podatljivi elementi

Lisnate opruge čine osnovu tzv. dugih podatljivih elemenata, a zbog jednostavne proizvodnje i sklapanja vrlo su dugo u uporabi jer se koriste u preciznim fizikalnim uređajima još od početka industrijske revolucije, a vjerojatno i ranije. Lisnate opruge podatljive su cijelom svojom duljinom koja je relativno velika u odnosu na debljinu i širinu, pa se u ovom slučaju govori i o distribuiranoj podatljivosti.

Lisnata se opruga može proizvesti kao tanka ploča ukliještena između dva kruta tijela, ali izrada može biti i monolitna. Na Slici 2.2 prikazane su dvije konstrukcijske konfiguracije uporabe lisnate opruge.



Slika 2.2 Lisnata opruga sa slobodnim krajem (a), lisnata opruga s krutim tijelom pričvršćenim na slobodnom kraju (b)

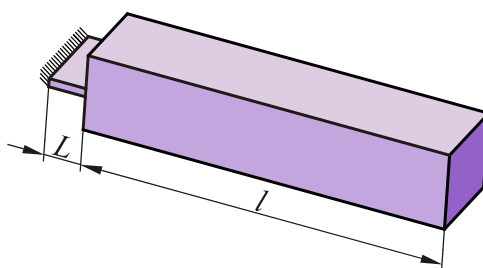
2.1.2 Kratki podatljivi elementi

Ako se podatljivi mehanizam sastoji od podatljivog elementa na čijim se slobodnim krajevima

nalaze kruta tijela koja, u odnosu na sam podatljivi element, imaju znatno veću duljinu i krutost tako da vrijede izrazi (2.1) i (2.2), podatljivi element se naziva kratki podatljivi zglob (Slika 2.3). Budući da je duljina podatljivog dijela mala, kod ovakvih elastičnih zglobova govori se o koncentriranoj podatljivosti. Kako je vidljivo na Slici 2.3, na jednom kraju kratkog podatljivog zgloba može biti uklještenje.

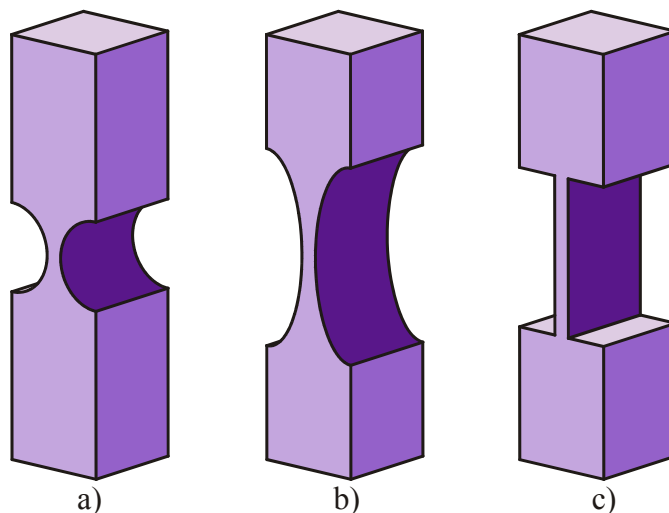
$$l \gg L \quad (2.1)$$

$$(EI)_1 \gg (EI)_L \quad (2.2)$$



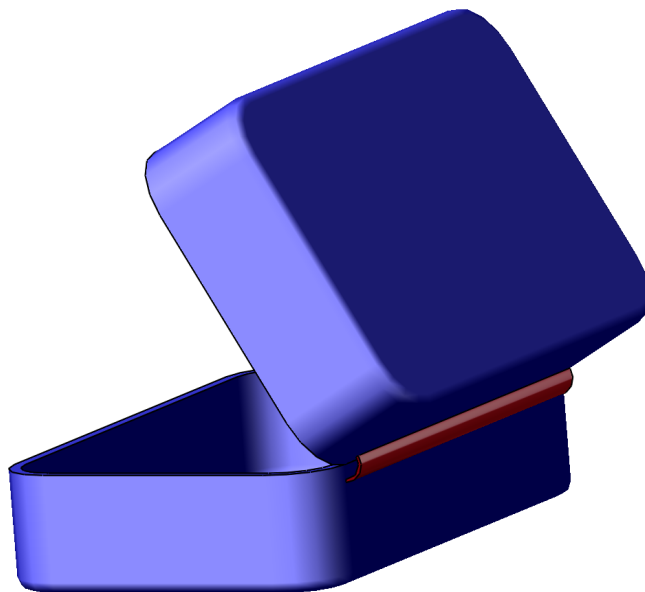
Slika 2.3 Kratki podatljivi zglob

Kao što je vidljivo na Slici 2.4, podatljivi dio može biti izveden na razne načine te imati oblik kružnice, elipse, prizme ili pak drugi pogodan oblik. Uobičajeni naziv u literaturi za ovako izvedene kratke podatljive elemente je zarez.



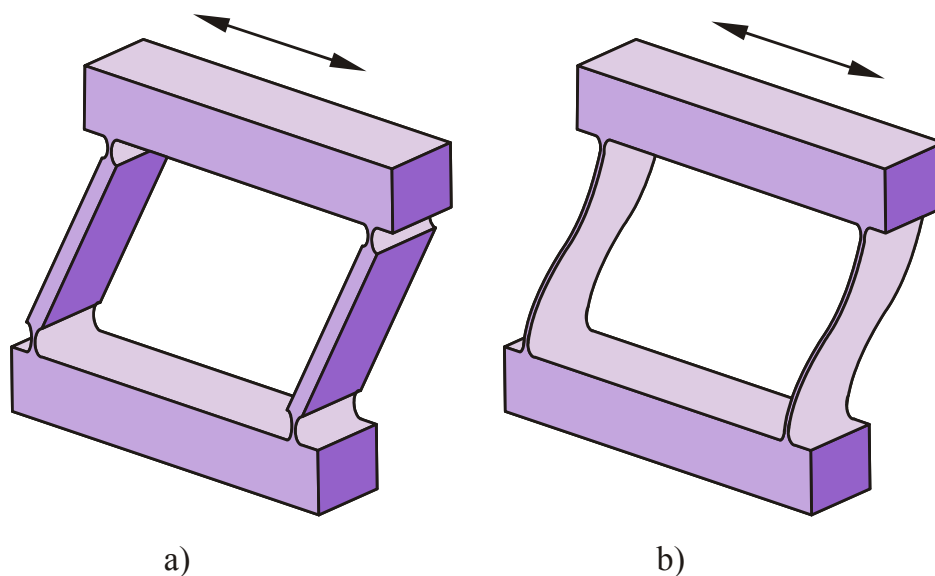
Slika 2.4 Prikaz izvedbi podatljivog dijela zgloba u obliku kružnice (a), elipse (b) i prizme (c)

Posebna izvedba kratkog podatljivog zgloba je izvedba kada je podatljivi element izrazito male duljine i debljine i naziva se engl. *living hinges* (Slika 2.5).



Slika 2.5 Primjer uporabe podatljivog elementa (obojan crvenom bojom) izrazito male duljine i debljine (engl. *living hinges*)

Na Slici 2.6 prikazana su dva translatorna mehanizma s jednim stupnjem slobode gibanja od kojih jedan ostvaraje gibanje koncentriranom podatljivošću (a), a drugi isto gibanje ostvaruje distribuiranom podatljivošću (b).

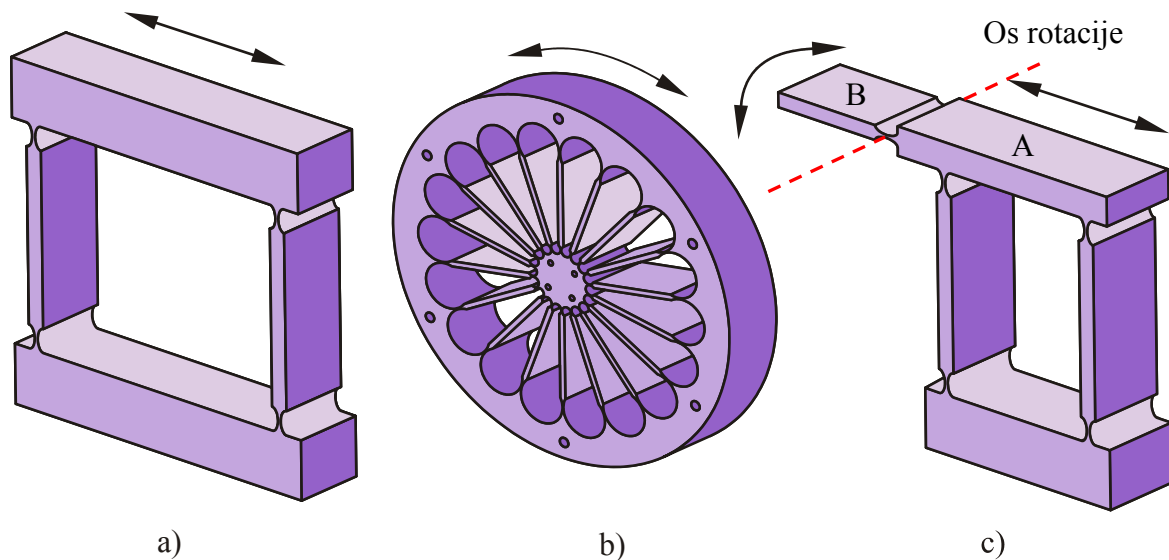


Slika 2.6 Pomak mehanizma ostvaren koncentriranom (a) i distribuiranom podatljivošću (b)

2.1.3 Složeni podatljivi mehanizmi

Podatljive je mehanizme, kao što je prikazano na Slici 2.7, moguće grupirati ovisno o ukupnom pomaku pokretnog krutog elementa, a koji je rezultat gibanja svih podatljivih

elemenata mehanizma. Podatljivi se mehanizmi mogu koristiti za dobivanje translacijskog (a), rotacijskog (b) ili kombiniranog gibanja s više stupnjeva slobode (c) [Howell, 2001]. Na Slici 2.7c vidljivo je da kruto tijelo A ostvaruje samo translacijsko gibanje, dok kruto tijelo B, koje je vezano za tijelo A kratkim podatljivim zglobovima uz translaciju i rotira oko osi rotacije ostvarujući kombinirano gibanje.



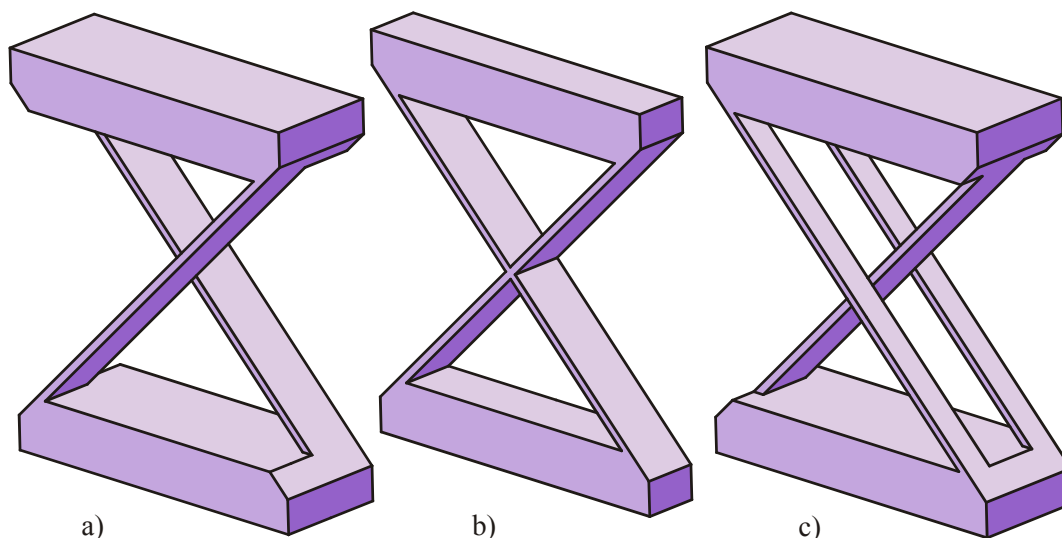
Slika 2.7 Podatljivi mehanizam koji vrši translacijsko (a), rotacijsko (b) i kombinirano (c) gibanje

Rotacijski zglobovi s lisnatim oprugama (Slika 2.8) mogu, pak, biti izvedeni na način da su opruge mimosmjerne (a) i (c) ili da se sijeku uzduž geometrijske osi mehanizma (b).

Doista, kada se zahtijevaju veći kutovi rotacije rabe se upravo rotacijski podatljivi mehanizmi s lisnatim oprugama koje se najčešće križaju pod kutom od 90° , dok je geometrijska os ujedno i os na kojoj se podatljivi elementi križaju [Smith, 2000].

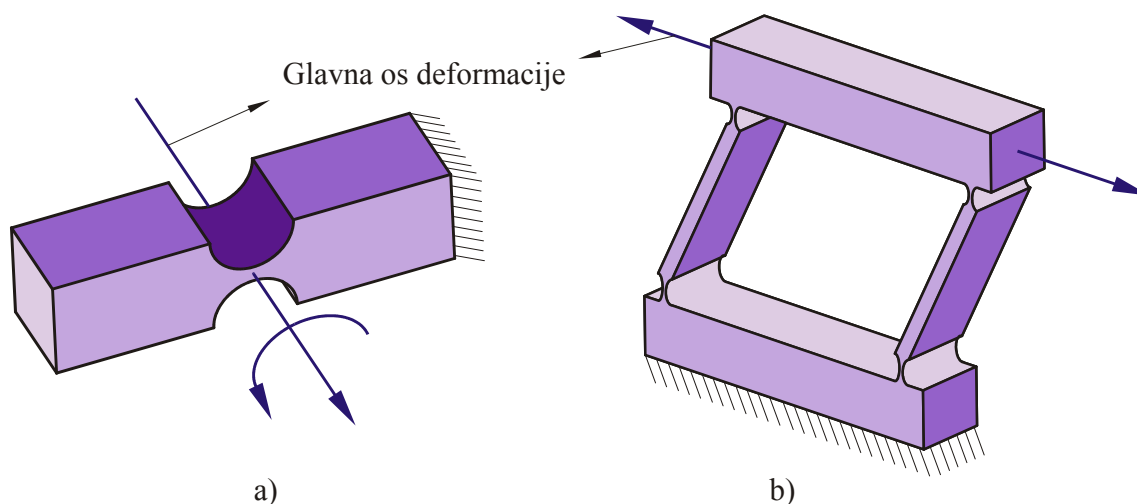
Izvedba prikazana na Slici 2.8a u praksi često zadovoljava. Ipak, u praksi je, zbog simetričnosti mehanizma, a time i veće torzijske krutosti, pogodnija izvedba prikazana na Slici 2.8c, gdje dva vanjska podatljiva elementa imaju ukupnu širinu istu kao i središnji element koji se može sastojati iz jedne ili dvije lisnate opruge.

Rotacijski mehanizam kod kojeg su podatljivi elementi spojeni uzduž geometrijske osi naziva se monolitni rotacijski podatljivi mehanizam (Slika 2.8b), a danas je sve češće u uporabi zbog jeftinije izrade kao posljedice naprednih proizvodnih tehnologija [Haberland, 1981], [Howells, 1996].



Slika 2.8 Zglobovi s mimosmjernim lisnatim oprugama (a) i (c), te zglobovi kod kojih se lisnate opruge sijeku uzduž geometrijske osi mehanizma (b)

Idealni rotacijski podatljivi zglob bi trebao imati čim veću podatljivost, odnosno elastičnost oko glavne osi deformacije tzv. osi elastičnosti koja predstavlja os relativne rotacije krutih segmenata rotacijskog mehanizma (Slika 2.9a). Idealni translacijski zglob bi, pak, trebao imati čim veću elastičnost u smjeru glavne osi deformacije koja predstavlja os translacije krutog segmenta (Slika 2.9b), [Pavlović D., Pavlović T., 2013].



Slika 2.9 Glavna os deformacije kod rotacijskog podatljivog zgloba (a) i translacijskog podatljivog mehanizma (b)

Mehanizmi prikazani na Slici 2.9 su ravninski zbog jedne osi deformacije, dok prostorni podatljivi mehanizmi mogu imati dvije pa i više osi deformacije [Pavlović D., Pavlović T., 2013].

Zbog svih navedenih prednosti podatljivih mehanizama njihova je primjena svakodnevna od kojih su neke prikazane na Slici 2.10.



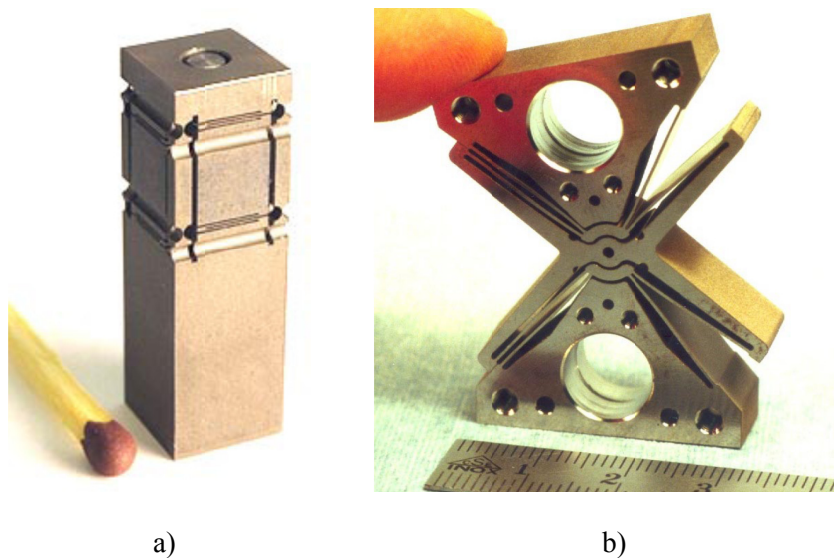
Slika 2.10 Podatljivi mehanizmi u svakodnevnoj primjeni

Posebno široku primjenu podatljivi mehanizmi našli su u preciznom inženjerstvu, i to posebice kod sustava za precizno i točno pozicioniranje, uređaja za mikromanipulaciju te mikro–elektro–mehaničkih (MEMS) uređaja, a često se koriste i u mjeriteljstvu, seizmologiji i astronomiji ili pak kao dijelovi instrumenata na satelitima.

Na Slici 2.11a prikazana je, primjerice, monolitna izvedba (nije potrebna montaža) translacijskog mehanizma s dva stupnja slobode gibanja proizvedenog postupkom elektro–erozijske obrade žicom (engl. *wire electro–discharge machining* W–EDM), a sastoji se od šesnaest kratkih zglobova čiji su podatljivi dijelovi, izvedeni u obliku kružnice, široki samo 30 μm , dok je ukupni translacijski pomak mehanizma 0,5 mm. Kod ovakve izvedbe nema uklještenja pa time ni pripadajućih tolerancija i podatljivosti uklještenja [Nat. Phy. Lab., 1956], odnosno minimizira se barem dio pogrešaka.

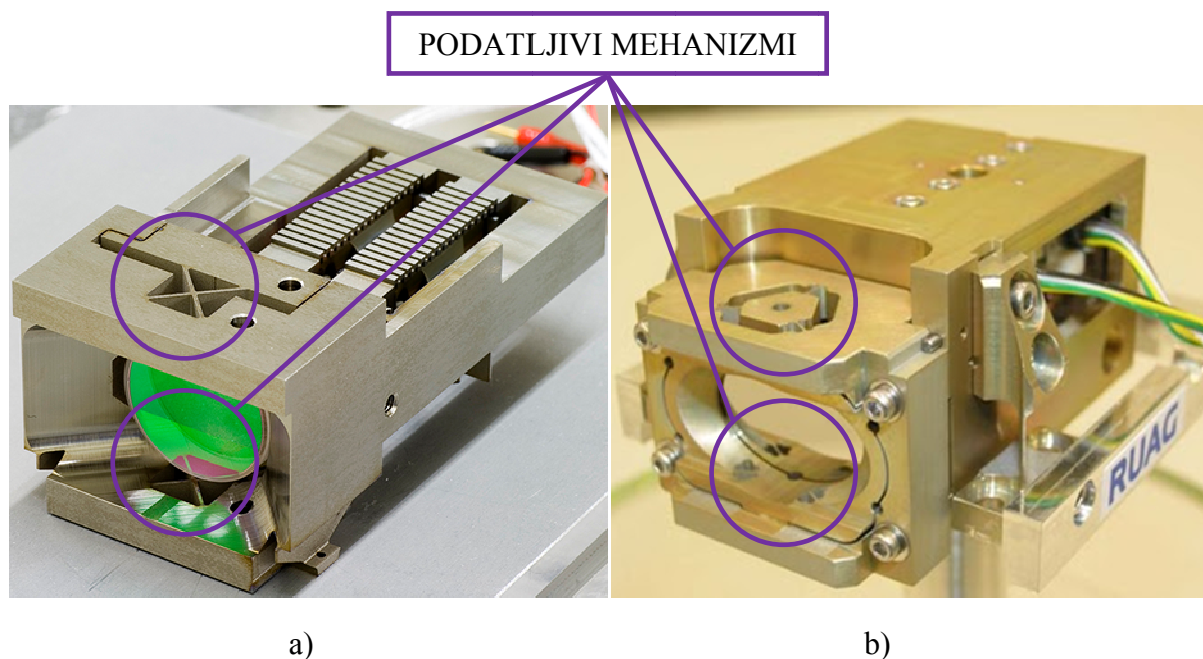
Na Slici 2.11b prikazan je pak monolitni rotacijski mehanizam s lisnatim oprugama tzv. leptirasti mehanizam (engl. *butterfly*) koji se koristi u svemirskim uređajima za skeniranje, odnosno komunikacijskim uređajima između satelita. Parazitni pomak je u ovom slučaju manji od 2 μm pri kutu rotacije mehanizma od $\pm 10^\circ$ uz postignutu razlučivost gibanja od

50 μ rad.



Slika 2.11 Monolitna izvedba mehanizama koji ostvaruje translacijsko gibanje raspona 0,5 mm (a) [Henein et al., 1999] i leptirastog mehanizma s lisnatim oprugama (b) [Henein et al., 2003]

Primjer uporabe podatljivih mehanizama u konstrukcijskom sklopu prikazan je na Slici 2.12.



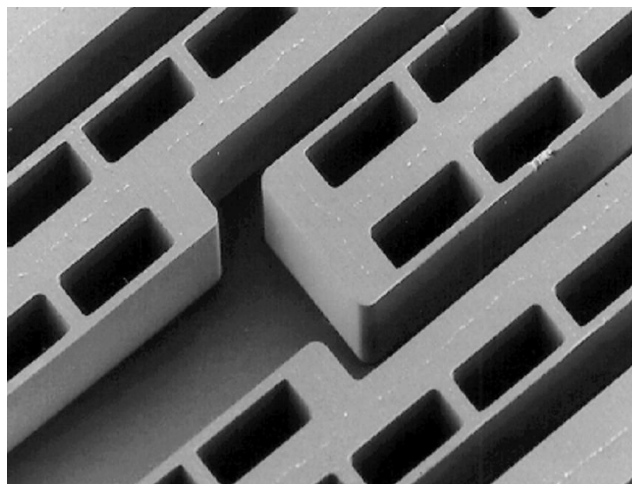
Slika 2.12 Sustav za usmjeravanje laserskih zraka u satelitima razvijen u grupaciji TNO u Nizozemskoj (a) i grupacijama RUAG i CSEM u Švicarskoj (b)

Prikazana su tu dva neovisno razvijena sustava za usmjeravanje laserskih zraka u satelitima LISA (engl. *Laser Interferometer Space Antenna*) koji bi se trebali nalaziti na međusobnoj

udaljenosti od pet milijuna kilometara. Sustav je razvila grupacija TNO u Nizozemskoj (a) i grupacije RUAG i CSEM u Švicarskoj (b).

Važno je ovdje još kratko spomenuti i da je, razvojem proizvodnih tehnologija, poput spomenute elektro–erozijske obrade, povećan i radni raspon unutar granica dozvoljenih naprezanja jer je minimizirana koncentracija naprezanja za određeni progib, tj. omogućena je optimizacija oblika zgloba. Elektro–erozijska obrada omogućuje postizanje praktički proizvoljnih oblika zglobova uz primjenu male sile pri obradi, neosjetljiva je na tvrdoću materijala, omogućuje visoku točnost, velike odnose dimenzija (engl. *aspect ratios*) i monolitnu izradu. Postupak elektro–erozijske obrade, usprkos prednostima, kod izrade zglobova mikrometarskih debljina dovodi i do neželjenih efekata: površinske hrapavosti koja je mikro–koncentrator naprezanja, pojave 'bijelog sloja' odmah ispod površine koji je veći kod čelika nego kod aluminija, kao i 'toplinski pogođene zone' (na spoju 'bijelog sloja' i osnovnog materijala) u kojoj se javlja niža krutost, tj. dolazi do virtualnog smanjenja debljine zgloba [Henein et al., 1997].

Kao bolji postupak se kod nekih primjena, posebice na polju mikrotehnologija, stoga pokazala tehnologija duboke litografije X–zrakama (njem. *Lithographie, Galvanik und Abformung* – LIGA). Karakteristike ovog postupka su: primjenjivost na širokom spektru materijala, paralelnost i glatkoća bočnih stranica, mogućnost izvedbe bočnih stranica pod određenim kutom dvostrukim izlaganjem X–zrakama, odnos dimenzija veći od 100, mogućnost izvedbe različitih geometrija [Saile et al., 2009]. Na Slici 2.13 prikazana je struktura izrađena dubokom litografijom X–zrakama.



Slika 2.13 Struktura izrađena dubokom litografijom X–zrakama, najmanja širina iznosi 6 μm , visina je 120 μm

Kod spomenutih postupaka obrade količina odvojenog materijala obradom je mala. Veća količina odvojenog materijala postiže se procesom mikroproizvodnje (mikroglodanja, mikrotokarenja i dr.) pri čemu se postiže odlična kvaliteta površine, ali je tvrdoća materijala ograničena na 63 HRC [Reimer, 2007]. Na Slici 2.14 prikazan je izradak proizveden u 'mikrotvornici'.



Slika 2.14 Izradak proizveden u 'mikrotvornici' [LeRoux, 2012]

Već je spomenuto da su sastavnice podatljivih mehanizama podatljivi elementi različitih izvedbi. U ovom radu analizirat će se rotacijski podatljivi mehanizmi s podatljivim elementima koji su dugački i pravokutnog su presjeka dok im je debljina mala u odnosu na širinu (cf. Sliku 2.8). U literaturi se najčešće takvi elementi nazivaju lisnate opruge, iako su fizikalno to vitki/tanki štapovi uklješteni u pripadajućim rubnim točkama, pa se može naići i na izraz vitke/tanke konzolne grede. Na tom se polju rada, pak, dosadašnja istraživanja mogu podijeliti na:

- analizu samih lisnatih opruga te
- analizu podatljivih mehanizama, a čiji je temelj istraživanje vitkih štapova.

2.2 Analiza naprezanja i deformacija lisnatih opruga

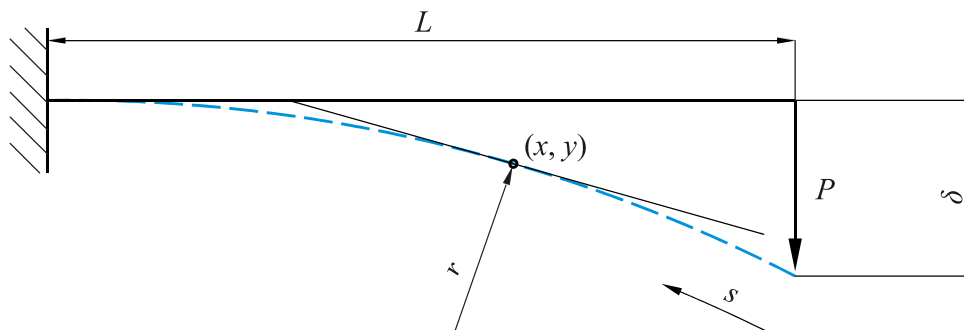
Pregledom dosadašnjeg stanja u području istraživanja uviđa se da se statička analiza lisnatih opruga svodi na rješavanje odgovarajuće diferencijalne jednadžbe elastične linije, u literaturi poznate kao *Elastica* metoda, koja podrazumijeva određivanje točnog oblika zakrivljene linije podatljivog vitkog štapa tzv. elastične linije. Jednadžba elastične linije u pravokutnom

koordinatnom sustavu glasi

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = - \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.3)$$

gdje je E Youngov modul elastičnosti, I aksijalni moment tromosti (ili inercije), r polumjer zakrivljenosti elastične linije u bilo kojoj točki s koordinatama (x, y) , a M moment savijanja u toj točki. Rješavanje jednadžbe elastične linije za male progibe svodi se na linearno ovisan problem i jednostavno se rješava analitički uvođenjem pojednostavljenja, odnosno zanemarivanjem male vrijednosti $(dy/dx)^2$ u izrazu (2.3). Za velike progibe rješenje *Elastica* metode je složeno i do rješenja se može doći analitički, u literaturi poznato u engleskoj inačici *closed-form* ili različitim numeričkim metodama (npr. metodom konačnih elemenata). Analitičko rješavanje uključuje pak rješavanje potpunih i nepotpunih eliptičnih integrala ili, alternativno, rješavanje aproksimacijskih polinoma ili primjenu iterativnih procedura pa se često zbog kompliciranosti izraza mora uporabiti numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi (npr. numerička metoda 'gađanja' engl. *shooting* ako su poznati rubni uvjeti).

Prve zabilješke i rezultati eksperimentalnih mjerenja ponašanja greda oslonjenih na oba kraja i konzolnih greda datiraju pak iz renesansnog razdoblja, a proveo ih je L. da Vinci. Galileo Galilei početkom sedamnaestog stoljeća provodi eksperimentalna mjerenja na konzolnoj gredi opterećenoj poprečnom silom na slobodnom kraju kako bi utvrdio ono opterećenje koje dovodi do njenog loma. Dobivene vrijednosti maksimalnog opterećenja bile su tri puta veće od stvarnih vrijednosti koje dovode do loma jer je pretpostavio da do loma materijala (lomne čvrstoće) vrijedi linearna ovisnost naprezanja i deformacije. Nešto kasnije Mariotte eksperimentalnim mjerenjima također definira maksimalno opterećenje. Mariotte je utvrdio i da je, ako je konzolna greda u horizontalnom položaju i na nju djeluje poprečna sila prema dolje, gornji dio poprečnog presjeka grede opterećen vlačno, a donji dio tlačno. Za razliku od Galilea i Mariotta, koji su istraživali čvrstoću greda, J. Bernoulli definira njihov progib i time započinje novo poglavlje mehanike elastičnosti [Timoshenko, 1953]. J. Bernoulli slijedi Mariottove pretpostavke o položaju neutralne osi konzolne grede prikazane na Slici 2.15 i utvrđuje da je polumjer zakrivljenosti konzolne grede proporcionalan momentu savijanja. Njegov nećak D. Bernoulli predlaže L. Euleru korištenje varijacijskog računa za rješavanje jednadžbe elastične linije.

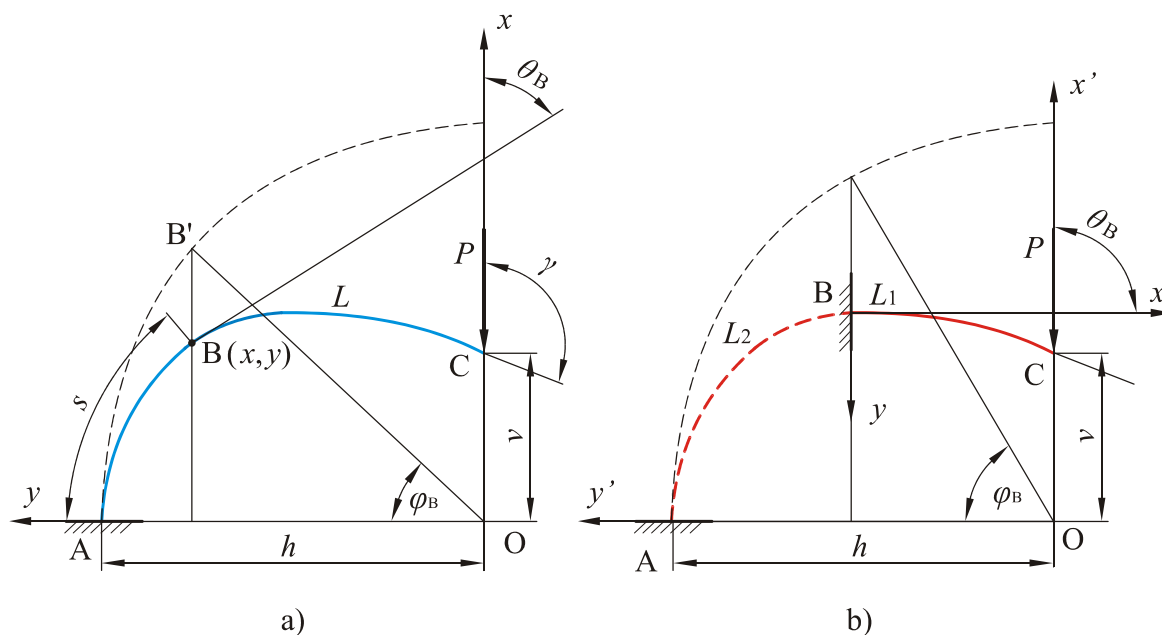


Slika 2.15 Konzolna greda opterećena na slobodnom kraju poprečnom silom P koja uzrokuje progib δ slobodnog kraja

L. Euler prihvaća teoriju J. Bernoullia o proporcionalnoj ovisnosti zakrivljenosti elastične grede i momenta savijanja i u svojim daljnjim radovima daje rješenja diferencijalne jednadžbe elastične linije za različite probleme [Euler, 1744]. Euler utvrđuje da je sila koja uzrokuje izvijanje konzolne grede proporcionalna s π^2 i obrnuto proporcionalna s $4L^2$, gdje je L duljina konzolne grede. Kako bi utvrdio kritičnu silu koja uzrokuje izvijanje, J. L. Lagrange analizira konzolnu gredu opterećenu poprečnom silom na slobodnom kraju. Njegove pogreške korigira njegov nećak G. A. A. Plana, a vitku konzolnu gredu istražuje i M. Born [Timoshenko, 1953], [Fertis, 2006].

Problem ukliještenog vitkog štapa opterećenog na slobodnom kraju uzdužnom silom koja uzrokuje progibe u nelinearnom području u svojoj knjizi opisuje S. P. Timoshenko [Timoshenko, 1953], dok je procedura rješavanja primjenom analogije između diferencijalne jednadžbe elastične linije i diferencijalne jednadžbe koja definira gibanje fizikalnog njihala dana u referenci [Timoshenko, Gere 1961]. U literaturi se mogu naći razni pristupi rješavanja konzolnih greda i greda oslonjenih na oba kraja. Rješenja konzolnih greda opterećenih poprečnom silom na slobodnom kraju korištenjem eliptičnih integrala dana su u [Barten, 1945], [Bisshopp, Drucker, 1945] i [Plainevaux, 1953], dok su u referencama [Conway, 1947] i [Gospodnetic, 1956] dana rješenja greda oslonjenih na oba kraja opterećenih poprečnom silom na sredini također dobivena primjenom eliptičnih integrala. U referenci [Scott, Carver, 1955] dana su rješenja točne jednadžbe elastične linije integriranjem niza funkcija za gredu oslonjenu na oba kraja opterećenu poprečnom silom na sredini, te za konzolnu gredu opterećenu na slobodnom kraju poprečnom silom i zasebno momentom savijanja. Procedurom opisanom u referenci [Frisch – Fay, 1961], koja koristi pristup *Elastica* metode, a primjenjuje se na zakrivljene konzolne grede opterećene kosom silom, izračun je u velikoj mjeri pojednostavljen. Frisch – Fay postavlja 'princip elastične sličnosti' (engl. *principle of*

elastic similarity) koji kaže da se svaka konzolna greda opterećena kosom silom na slobodnom kraju može svesti na osnovni problem opterećenja konzolne grede, odnosno na rješavanje konzolne grede opterećene aksijalnom silom na slobodnom kraju. Na Slici 2.16a prikazan je spomenuti osnovni problem opterećenja konzolne grede aksijalnom silom na slobodnom kraju u deformiranom položaju. Deformirani položaj konzolne grede prikazan je punom plavom linijom. Na Slici 2.16b prikazan je princip elastične sličnosti primijenjen na horizontalnu konzolnu gredu duljine L_1 (puna crvena linija) opterećenu poprečnom silom, produljivanjem konzolne grede u točki B za duljinu L_2 (isprekidana crvena linija).



Slika 2.16 Princip elastične sličnosti (prema [Frisch – Fay, 1961])

Vrijedi

$$L = L_1 + L_2 \quad (2.4)$$

U referenci [Frisch – Fay, 1962] dana je procedura rješavanja konzolnih greda sa i bez početne zakrivljenosti opterećenih silom na slobodnom kraju primjenom eliptičnih integrala.

Kasnije su dijelovi procedure iz reference [Frisch – Fay, 1961] korišteni u pristupima koje daju [Mattiason, 1981] i [Navee, Elling, 1992]. Komplicirane grafo–analitičke metode za izračun konzolnih greda s velikim progibima opterećenih momentom definirane su u [Hymans, 1946] i [Seames, Conway, 1957] s tim da je druga metoda sadržavala i rješenje konzolnih greda s blagom početnom zakrivljenošću. Problem je riješen uporabom eliptičnih integrala u [Conway, 1956], [Mitchell, 1959] i [Van Wijngaarden, 1949]. Yau je za izračun

vitke konzolne grede opterećene kosom silom koristio *Elastica* metodu [Yau, 2010] tako da je djelovanje kose sile uzrokovao užetom koje 'vuče' slobodni kraj štapa. U tom je slučaju kut pod kojim djeluje sila promjenjiv.

De Bona i Zelenika su, također koristeći *Elastica* metodu, riješili opći slučaj problema kada je tanka konzolna greda s početnom zakrivljenošću opterećena kosom silom i momentom [De Bona, Zelenika, 1997]. Pristup De Bone i Zelenike korišten je i u ovom radu za izračun lisnatih opruga rotacijskih podatljivih mehanizama, pa će o tome više biti rečeno u trećem poglavlju disertacije.

2.3 Podatljivi mehanizmi s lisnatim oprugama

Prva eksperimentalna mjerenja rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama (kakav je prikazan na Slici 2.8a) proveo je W. E. Young [Young, 1944]. Istraživanja su provedena na rotacijskim podatljivim mehanizmima čije su lisnate opruge bile u simetričnom položaju za velike kutove rotacije mehanizma, pri čemu je mehanizam bio opterećen momentom. Na osnovu dobivenih eksperimentalnih rezultata definirani su izrazi za izračun karakterističnih parametara: rotacijske krutosti mehanizma, ekvivalentnih naprezanja i parazitnog pomaka geometrijskog središta mehanizma. U radu su dane i preporuke za konstrukciju rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama. Young tako savjetuje da se lisnate opruge, ako je moguće, trebaju križati na sredini aktivnih duljina kako bi se reduciralo naprezanje zbog 'oštroug' savijanja jer pomicanjem sjecišta dolazi do značajnog smanjenja polumjera zakrivljenosti. Usporedbom izvedbi mehanizama kod kojih su se lisnate opruge sjekle pod kutovima od 30° , 60° i 90° autor dolazi do zaključka da se povećanjem tog kuta povećava rotacijska krutost i parazitni pomak rotacijskog podatljivog mehanizma. Analiza je pokazala da je parazitni pomak zanemarivo mali za kutove rotacije mehanizma manje od 15° . Ako se ne traži izrazito velika preciznost, npr. u preciznim instrumentima, tada se preporuča uporaba ovakvih zglobova za kutove rotacije mehanizma i do 45° .

W. E. Young je provodio eksperimente za lisnate opruge duljina 38,1 mm i 76,2 mm, ali su se u preciznim instrumentima rabile znatno kraće lisnate opruge. Stoga su L. V. Nickols i H. L. Wunsch proveli eksperimente za sljedeće duljine lisnatih opruga: 4,013 mm, 10,414 mm i 16,764 mm [Nickols, Wunsch, 1951]. Istraživanja su provedena za velike kutove rotacije mehanizama, lisnate su opruge bile u simetričnom položaju pod kutom od 90° , a mehanizmi su bili opterećeni momentom. Za svaku duljinu varirano je i pet debljina lisnatih opruga kako bi se istražio utjecaj debljine lisnatih opruga na rotacijsku krutost zgloba. Očekivano, uočeno

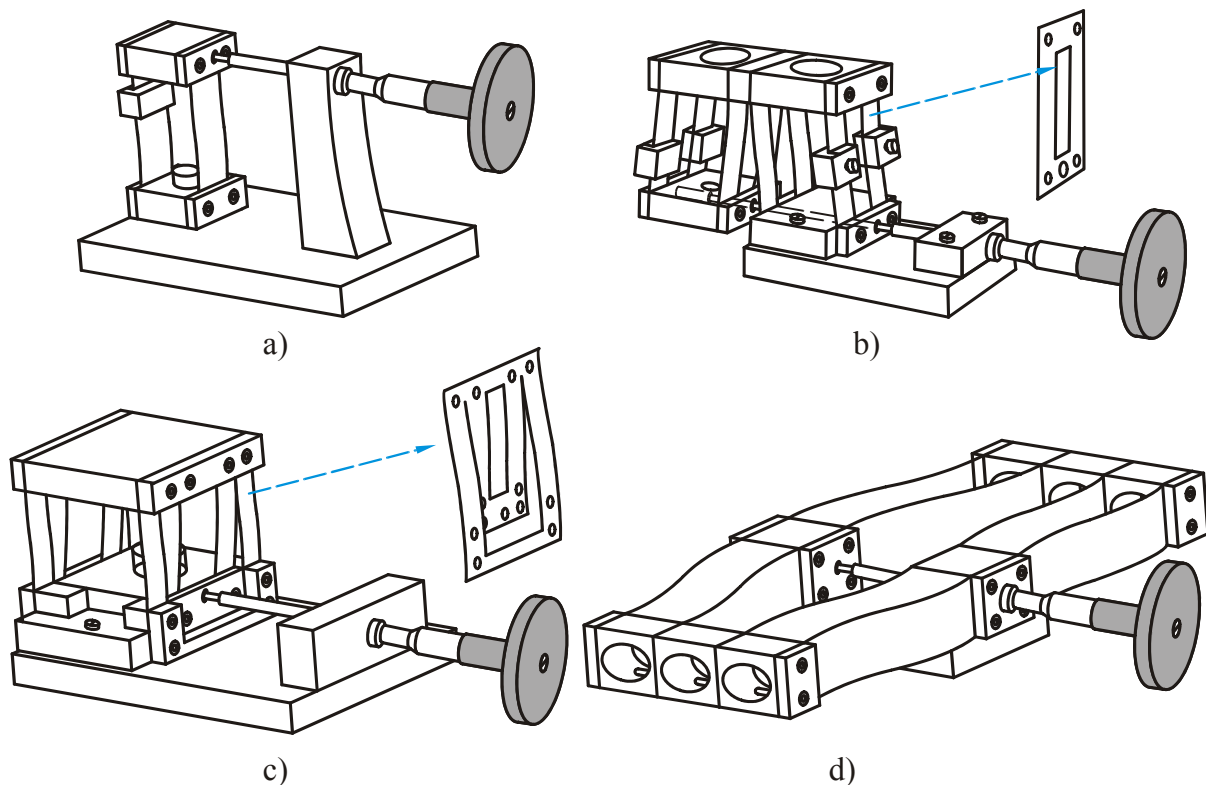
je da se povećanjem debljine lisnatih opruga povećava rotacijska krutost, dok se s povećanjem duljine rotacijska krutost smanjuje. Na osnovu dobivenih eksperimentalnih rezultata definirani su izrazi za izračun karakterističnih parametara: rotacijske krutosti mehanizma, naprezanja na savijanje i parazitnog pomaka geometrijskog središta mehanizma.

Haringx je istih godina proveo teorijska istraživanja podijeljena u dva dijela, odnosno postavio je matematičku formulaciju za velike i za male kutove rotacije rotacijskog podatljivog zgloba s lisnatim oprugama [Haringx, 1949]. Za područje malih kutova rotacije mehanizam je opterećen vanjskom poprečnom silom i momentom. Zbog svoje složenosti, analitičko rješenje za zglob opterećen na taj način, može se dobiti samo uz pojednostavljenje oblika jednadžbe elastične linije. Ono dovodi do ograničenja primjene dobivenih izraza te su dobiveni izrazi primjenjivi za kutove do 20° . Kod zgloba opterećenog momentom i vanjskim silama treba voditi računa i o stabilnosti zgloba, tj. rotacijska krutost mehanizma ne smije poprimiti negativnu vrijednost. Za povećanje stabilnosti zgloba, Haringx preporuča kutove između lisnatih opruga od 60° i 90° , te da pozicija zgloba bude takva da vanjska sila u lisnatim oprugama uzrokuje vlačnu silu. Haringx je, isto tako, postavio izraze za izračun zgloba opterećenog samo momentom pri čemu je riješio točnu diferencijalnu jednadžbu elastične linije. Kako je već rečeno, rješavanje točne jednadžbe elastične linije iziskuje uporabu eliptičnih integrala i iterativni postupak. Dobivene rezultate usporedio je s Youngovim eksperimentalnim mjerenjima i time potvrdio matematičku formulaciju koju je definirao.

U istom periodu, 1948. godine i Wittrick je izradio matematičku formulaciju koja vrijedi za kutove rotacije rotacijskog podatljivog mehanizma manje od 20° [Wittrick, 1948]. Kao i Haringx, i Wittrick je definirao izraze za zglob opterećen vanjskom poprečnom silom i momentom. Dao je i niz krivulja koje definiraju sve potrebne parametre za konstrukciju zgloba čije se lisnate opruge sijeku pod kutom od 90° (u slučaju da se radi o nekom drugom kutu dani su izrazi za preračunavanje). Tako je definirao područje stabilnosti zgloba, maksimalni moment savijanja i uzdužnu silu u lisnatim oprugama u ovisnosti o različitim kombinacijama vertikalnih i horizontalnih sila. Autor je utvrdio da vanjska sila uvelike utječe na stabilnost i rotacijsku krutost zgloba. Nadalje, ako je rotacijski podatljivi mehanizam opterećen vanjskom silom, kut rotacije mehanizma više nije proporcionalan momentu koji izaziva taj kut rotacije, ali se za praktičnu primjenu ta činjenica može zanemariti. Provedena su i eksperimentalna mjerenja za male kutove rotacije mehanizma (do 7°) i dobiveno je dobro poklapanje rezultata. Nekoliko godina kasnije Wittrick je proširio svoje istraživanje,

pokazavši da rotacijska krutost podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama znatno ovisi o vanjskoj sili koja djeluje na zglob, te da se na rotacijsku krutost može utjecati pomicanjem točke u kojoj se lisnate opruge križaju [Wittrick, 1951].

Jones je, pak, u periodu od 1951. do 1962. godine objavio niz radova koji se bave primjenom podatljivih mehanizama u preciznom inženjerstvu. U radu [Jones, 1951] opisuje tako različite izvedbe translacijskih podatljivih mehanizama. Najjednostavnija je izvedba prikazana na Slici 2.17a kod koje pomični dio, pokretan mikrometarskim vijkom, ostvaruje translacijsko gibanje u odnosu na nepomični dio za kojega je spojen pomoću lisnatih opruga. Ovom izvedbom je bilo nemoguće postići idealnu paralelnost zbog pogrešaka izvedbe i razlike u čvrstoći lisnatih opruga. U radu su opisane još tri poboljšane izvedbe koje su također prikazane na Slici 2.17: kompenzirani translator (b), kompaktni kompenzirani translator (c) i kompenzirani translator s izbjegavanjem utjecaja težine blokova na glavni stupanj slobode gibanja (d).



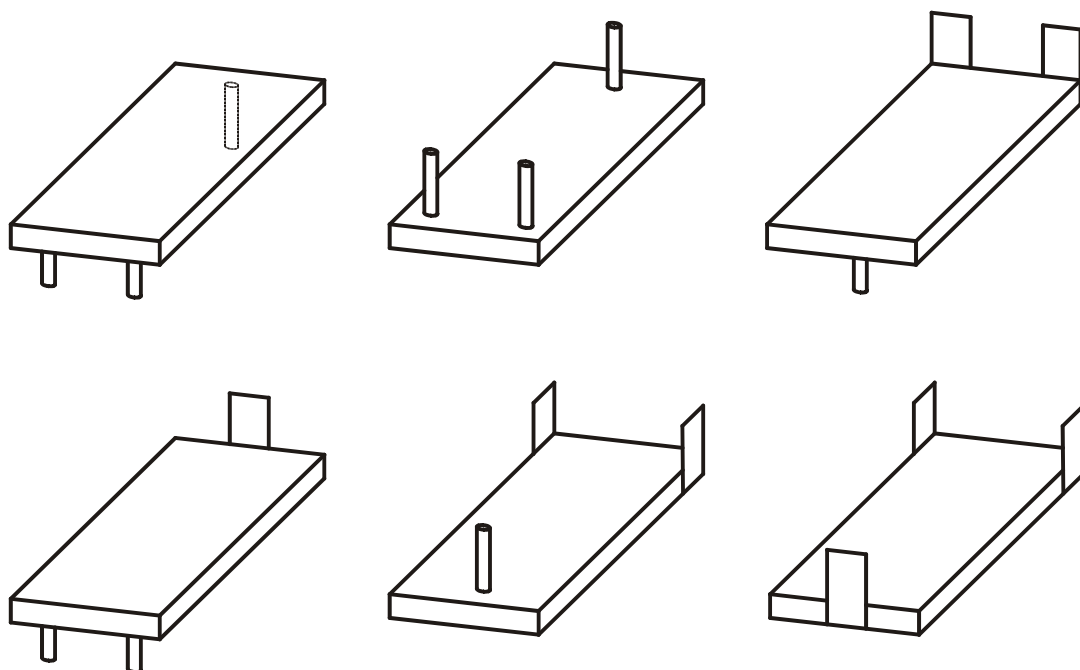
Slika 2.17 Jednostavni translator s paralelnim oprugama (a), kompenzirani translator (b), kompaktni kompenzirani translator (c), kompenzirani translator s izbjegavanjem utjecaja težine blokova na glavni stupanj slobode gibanja (d) (prema [Jones, 1951])

U radu je opisana izvedba (d) kao najbolja zbog najmanjeg parazitnog pomaka. Spomenuta se izvedba sastoji od četiri para lisnatih opruga koje su simetrične u odnosu na os vijka te je

kod nje postignuta točnost pri translacijskom pomaku od 5 mm bila na razini od $\pm 0,00508 \mu\text{m}$ po visini a uz zanošenje od $0,019050 \mu\text{m}$.

U radu iz 1952. godine [Jones, 1952] opisuje translacijski podatljivi mehanizam za pomicanje optičkog proreza infracrvenog spektrometra, a kasnije [Jones, 1956] opisuje podatljivi mehanizam za istu namjenu, ali znatno većih dimenzija konstruiran za solarni spektrograf zvjezdarnice u Sunspotu u Novom Meksiku.

Jones 1955. godine [Jones, 1955] analizira podatljive elemente u obliku L–profila, a 1956. s Youngom [Jones, Young, 1956] istražuje odstupanja translacijskih podatljivih mehanizama od željenog gibanja, odnosno parazitne pomake. U referenci [Jones, 1961. I] autor mjeri brzinu svjetlosti u magnetskom polju i pri tom koristi kolimator i teleskop koji se nalaze na odvojenim nosivim konstrukcijama. Baza kolimatora s jedne je strane pričvršćena na postolje preko lisnate opruge, a s druge strane lisnatom oprugom kojoj je omogućen vertikalni i horizontalni translacijski pomak pomoću vijaka. Iste godine [Jones, 1961. II] opisuje načine montaže postolja preciznih instrumenata kako bi se minimizirao utjecaj mehaničkih utjecaja okoline na instrumente. Preporuča oslanjanje postolja na (najčešće) tri člana čija je krutost manja od krutosti postolja, kako bi njihova podatljivost omogućila gotovo nepomičan položaj postolja. Na Slici 2.18 prikazane su različite izvedbe oslonaca predložene u tome radu.



Slika 2.18 Izvedbe oslonaca postolja preciznih instrumenata (prema [Jones, 1961. II])

U radu iz 1962. godine Jones daje pregled primjene elastičnih i podatljivih elemenata pri

konstruiranju preciznih instrumenata [Jones, 1962].

Nekoliko je autora u svojim radovima analiziralo detaljnije neželjene pomake po stupnjevima slobode gibanja različitima od primarnog stupnja slobode – tzv. parazitne pomake, i to posebno rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama [Wuest, 1950], [Hasselmeier, 1954] i [Hildebrand, 1958]. U tim se radovima gibanje geometrijskog središta rotacijskog podatljivog mehanizma aproksimira kotrljanjem (odvaljivanjem) dvaju valjaka (kružnica) a svi su autori dobili identične izraze kojima se definira veličina parazitnog pomaka u vertikalnom i u horizontalnom smjeru.

Troeger 1962. godine [Troeger, 1962] navodi da na osjetljivost, točnost i ponovljivost položaja tradicionalnih zglobova u najvećoj mjeri utječu trenje i zračnosti. Obzirom da se zglobovi koriste u mnogim preciznim instrumentima, kontrolnim i mjernim uređajima, predlaže uporabu rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama upravo zbog izostanka trenja i zračnosti. U radu se također analiziraju parazitni pomaci geometrijskih središta mehanizama s lisnatim oprugama opterećenih momentom te se daju izrazi za izračun tih pomaka proizašli iz geometrije mehanizma. Dobivene vrijednosti uspoređuju se s deklaracijama proizvođača rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama i postignuta su vrlo dobra poklapanja rezultata.

Zelenika i De Bona 2002. godine [Zelenika, De Bona, 2002] istražuju utjecaj poprečnih sila na ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama uz provođenje eksperimentalnih mjerenja. Ovaj slučaj je vrlo važan kod mehaničkih konstrukcija, jer su u većini slučajeva analizirani mehanizmi spregnuti s mehaničkim elementima koji imaju značajnu težinu pa rotacija mehanizama nije ostvarena samo u prisustvu momenata. Problem je postavljen za velike kutove rotacije mehanizma. Postavljene su jednadžbe ravnoteže a njihovo je rješenje dobiveno Newton – Raphsonovom metodom. Pri tom je postupku riješena pojednostavljena jednadžba elastične linije. Predložena metoda uspoređena je s analitičkim i eksperimentalnim metodama dostupnima u literaturi. Uz to provedena su precizna eksperimentalna mjerenja s laserskom interferometrijskom tehnikom sljedbe trajektorije i dobiveni se rezultati izvrsno poklapaju s analitičkim rezultatima dobivenim uporabom Haringxovih izraza. Predložena metoda izračuna dala je dobre rezultate, a pogreška koja se javlja pripisuje se rješavanju približne, a ne točne jednadžbe elastične linije.

Bitencourt i ostali 2011. godine [Bitencourt et al., 2011] uopćavaju analizu Zelenike i De Bone opisanu u referenci [Zelenika, De Bona, 2002], također rješavajući približnu

diferencijalnu jednadžbu elastične linije. Postavljaju izraze za izračun parazitnih pomaka i analiziraju utjecaj pomaka točke presjecišta lisnatih opruga i kuta između njih na parazitne pomake rotacijskog podatljivog mehanizma. Rezultate dobivene razvijenom analitičkom metodom za rotacijski mehanizam opterećen momentom uspoređuju s eksperimentalnim mjerenjima iz reference [Zelenika, De Bona, 2002] pri malim kutovima rotacije. Usporedba je pokazala dobro poklapanje rezultata. Isto tako usporedba rezultata s analitičkim rezultatima danim u referenci [Hongzhe, Shusheng, 2010. II] pokazuje dobro poklapanje.

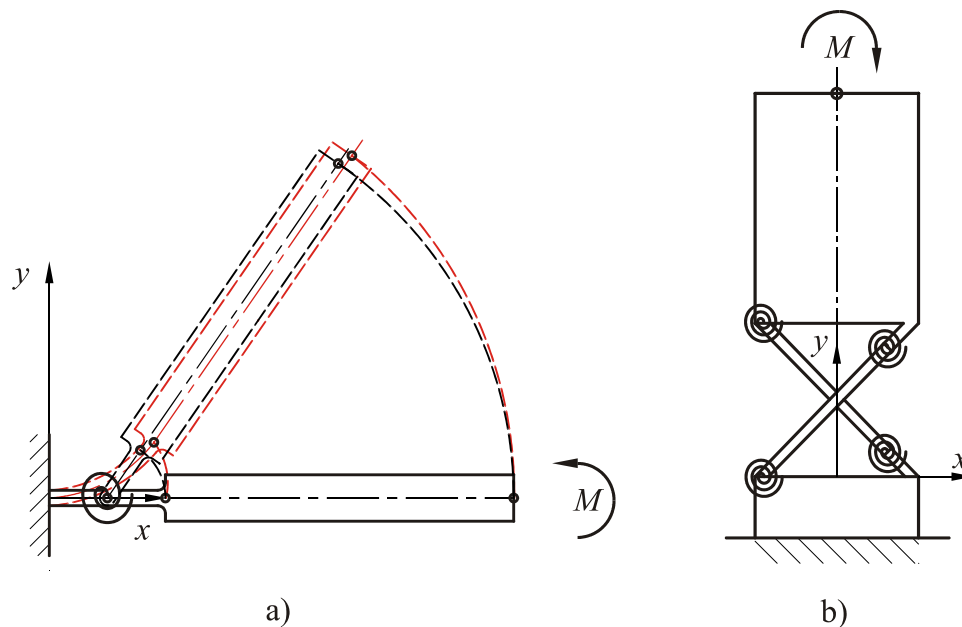
Goncalves i ostali 2014. godine [Goncalves et al., 2014] proširuju analizu provedenu u referenci [Bitencourt et al., 2011]. Analiziraju kako kut između lisnatih opruga, pomak njihovog presjecišta i varijacija vrijednosti vertikalne sile koja djeluje na mehanizam utječu na parazite pomake i rotacijsku krutost mehanizma.

Venanzi i ostali 2005. godine predstavljaju iterativnu metodu za nelinearnu analizu položaja štapova ravninskih podatljivih mehanizama [Venanzi et al., 2005]. Metoda omogućuje definiranje položaja i orijentacije svakog štapa mehanizma, pri poznatom progibu prvog štapa. Razmatrani su veliki progibi, a analiza položaja štapova napravljena je bez linearne aproksimacije koja se inače primjenjuje kod malih progiba. Metodu su primijenili i na rotacijski podatljivi mehanizam s lisnatim oprugama, pri čemu su ulazni podaci bili poprečna sila i kut rotacije mehanizma, a izlazni podaci moment koji uzrokuje željeni kut rotacije mehanizma i pomak točke u kojoj djeluje vanjska sila. Ostvarena su dobra poklapanja s rezultatima analize metodom konačnih elemenata.

Awtar i Slocum predstavljaju kinematički podatljivi mehanizam s paralelnim podatljivim elementima čija se konstrukcija temelji na sustavnom obrascu ograničenja i omogućuje velike raspone gibanja bez značajnih odstupanja od željenog gibanja. Postavljena je bezdimenzijska parametarska procedura koja predviđa ponašanje mehanizma sastavljenog od paralelnih podatljivih gredica [Awtar et al., 2006], [Awtar, Slocum, 2006].

U novije vrijeme Howell je ponudio sasvim novu metodu rješavanja podatljivih mehanizama, tzv. metodu pseudo-krutog modela tijela. Ta metoda omogućava jednostavnu analizu mehanizama kod kojih se u radu zahtijevaju veliki kutovi rotacije [Howell, 2001], [Jensen, Howell, 2002], [Howell, 2013], [Howell et al., 2013]. Osnovni koncept predložene metode je da se podatljivi mehanizam modelira kao mehanizam sastavljen od krutih štapova, a kako bi se čim točnije aproksimirala ovisnost opterećenja i progiba, u zglobove (zglob sa svornjakom) se smještaju opruge čija je ukupna krutost identična rotacijskoj krutosti mehanizma koji se

modelira. Kod kratkih podatljivih elemenata, kao što je prikazao na Slici 2.19a, zglob sa svornjakom i oprugom smješta se na sredinu pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom te se time ne čini velika pogreška. Kod rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama situacija postaje složenija jer je potrebno, uz krutost pojedine ekvivalentne opruge, odrediti i njen položaj. Model rotacijskog podatljivog mehanizma prikazan je na Slici 2.19b.

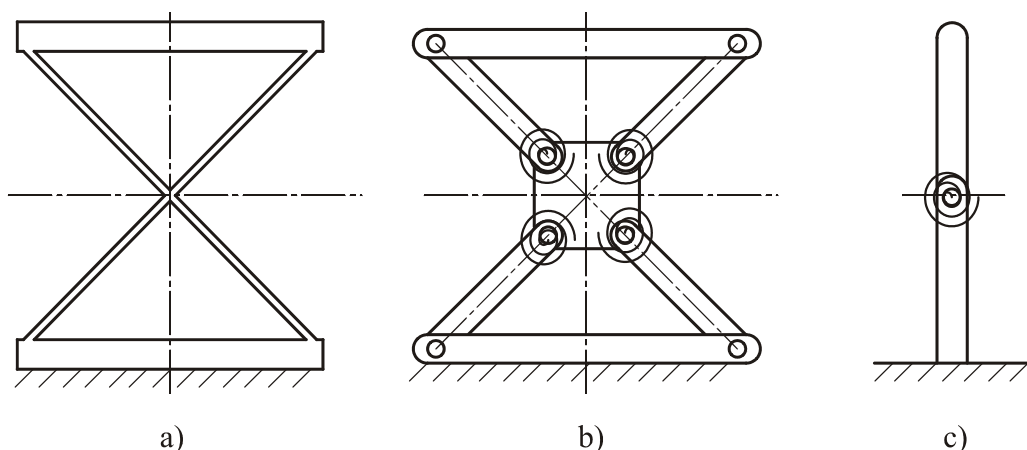


Slika 2.19 Model kratkog zgloba (a) i model rotacijskog podatljivog mehanizma (b) modeliran metodom pseudo–krutog modela tijela (prema [Jensen, Howell, 2002])

Na osnovu velikog broja analiza metodom konačnih elemenata u navedenim su radovima dobiveni izrazi u obliku polinoma kojima se definira položaj zglobova i krutost ekvivalentnih opruga. Jensen i Howell su uspoređivali rezultate za različite modele dobivene analizom metodom konačnih elemenata s rješenjima metode pseudo–krutog modela tijela, te su izvršili optimiziranje koeficijenata polinoma s ciljem minimizacije razlika karakteristika ovisnosti opterećenja i progiba između rotacijskog podatljivog mehanizma i njegovog modela. Metoda pseudo–krutog modela tijela je aproksimacijska te nije pogodna za preciznije proračune.

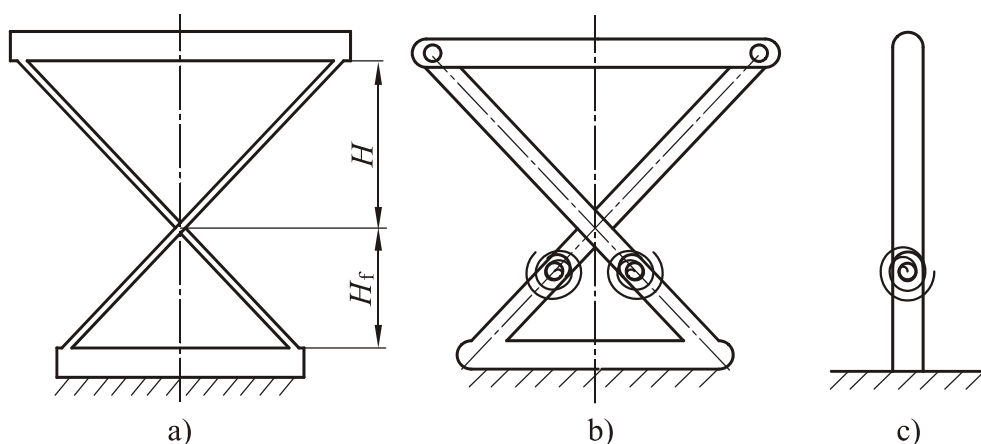
Brojni autori proširili su metodu pseudo–krutog modela tijela kako bi analizirali različite izvedbe podatljivih mehanizama. Pei i ostali proširuju je na monolitni rotacijski podatljivi mehanizam (engl. *cartwheel*) opterećen momentom kakav je prikazan na Slici 2.20a. Koriste dva pseudo–kruta modela tijela, štapni model (Slika 2.20b) i model zgloba sa svornjakom (Slika 2.20c) [Pei, Yu, 2009]. Modele verificiraju analizom metodom konačnih elemenata i pokazuju da su oba modela točna u predviđanju rotacijske preciznosti, ovisnosti opterećenja i

progiba, te karakteristike naprezanja zgloba, čak i kod velikih progiba.



Slika 2.20 Monolitni rotacijski podatljivi mehanizam (a), štapni model (b), model zgloba sa svornjakom (c) (prema [Pei, Yu, 2009])

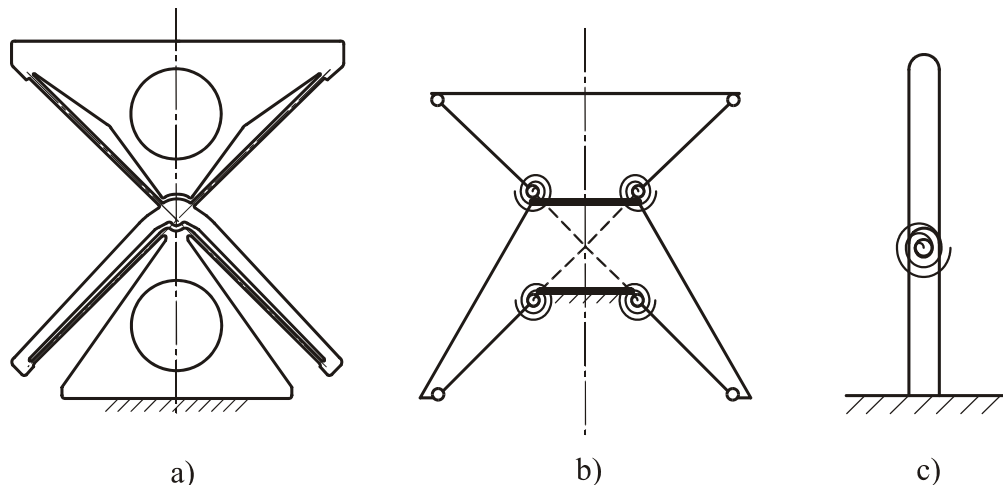
Nešto kasnije, 2010. godine, isti autori predstavljaju novu metodu za analizu jednostavnih pseudo–krutih modela tijela za različite mehanizme koji se temelje na lisnatim oprugama [Pei et al., 2010]. Analiziran je rotacijski mehanizam prikazan na Slici 2.21a i autori navode da se, ako je trenutno središte rotacije pojedine lisnate opruge pod utjecajem vanjskog opterećenja, lisnata opruga može modelirati kao štapni element s dva zgloba sa svornjakom. Kod pseudo–krutog modela spomenute lisnate opruge jedan je zglob tradicionalni zglob sa svornjakom dok je u drugom, pogodno pozicioniranom zglobu sa svornjakom, smještena i opruga čija je krutost ekvivalentna krutosti pojedine lisnate opruge. Rezultirajući model pseudo–krutog modela tretiranog mehanizma prikazan je na Slici 2.21b. Ukupna rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma sa Slike 2.21a modelirana je pak modelom zgloba sa svornjakom (Slika 2.21c).



Slika 2.21 Rotacijski podatljivi mehanizam (a), štapni model (b), model zgloba sa svornjakom (c) (prema [Pei et al., 2010])

Usporedbom dobivenih rezultata s metodom konačnih elemenata verificirana je točnost metode za ranu fazu konstrukcije mehanizama s lisnatim oprugama.

Pei i Yu 2011. godine predstavljaju podatljivi zglob prikazan na Slici 2.22a. koji je nazvan nesimetrični dvostruki jednakokračni trapezni zglob s lisnatim oprugama (engl. *anti-symmetric double leaf-type isosceles-trapezoidal flexure joint – ADLIF*) a koji se je, za raspon kutova do 5° , pokazao boljim rješenjem od monolitnog rotacijskog podatljivog mehanizma [Pei, Yu, 2011].



Slika 2.22 Nesimetrični dvostruki jednakokračni trapezni zglob s lisnatim oprugama (a), štapni model (b), model zgloba sa svornjakom (c) (prema [Pei, Yu, 2011])

Odgovarajući štapni model prikazan je na Slici 2.22b, a model zgloba sa svornjakom na Slici 2.22c. ADLIF zglob je sličan tzv. *butterfly* zglobu prikazanom na Slici 2.11 [Henein et al., 2003], ali u slučaju ADLIF-a postoji asimetrija pomičnog i nepomičnog dijela zgloba.

Hongzhe i Shusheng 2010. godine [Hongzhe, Shusheng, 2010. I] izvode jednostavan bezdimenzijski model rotacijskog mehanizma s lisnatim oprugama, također zasnovan na metodi pseudo-krutog modela tijela, kojim se predviđa rotacijska krutost zgloba. Lisnate opruge se u ovom slučaju ne sijeku u središnjim točkama, a zglob je opterećen momentom i poprečnom silom. Model opisuje ovisnost kuta rotacije o opterećenju. Pretpostavka je da je rotacija zgloba posljedica djelovanja momenta i horizontalne sile, dok vertikalna sila definira rotacijsku krutost pseudo-krutog modela tijela. U cilju utvrđivanja utjecaja geometrijskih parametara, analizirana je rotacijska krutost zasebno uzrokovana momentom, a zasebno horizontalnom silom. Nadalje, predstavljen je pristup za male rotacijske krutosti, neovisan o smjeru vertikalne sile, a u odnosu na silu izvijanja. Iste godine ti autori analiziraju i model koji predviđa parazitni pomak geometrijskog središta za rotacijski mehanizam s lisnatim

oprugama [Hongzhe, Shusheng, 2010. II]. Optimiziranjem položaja sjecišta lisnatih opruga izveden je pseudo–kruti model tijela koji ima vrlo mali parazitni pomak. Istražuju i utjecaj četiri tipa nesavršenosti izrade na konstrukcijske parametre, kako bi utvrdili stvarno ponašanje rotacijskog podatljivog mehanizma, s posebnim naglaskom na parazitne pomake. Predstavljen je i model mehanizma s velikim kutovima rotacije i malim parazitnim pomacima sastavljen od nekoliko generaliziranih rotacijskih mehanizama s lisnatim oprugama spojenih u seriju. Na temelju ekvivalentnog modela izveden je izraz za izračun parazitnih pomaka. Svi rezultati dobivenih modela u oba rada potvrđeni su metodom konačnih elemenata. Pokazano je da su rezultati točni za kutove rotacije do $\pm 15^\circ$. U cilju smanjenja parazitnog pomaka, Hongzhe i ostali 2011. godine [Hongzhe et al., 2011] proširuju navedeno istraživanje na podatljive mehanizme s lisnatim oprugama monolitne izvedbe. Mehanizam je ravninski, a sjecište lisnatih opruga je 'udaljeno' (mehanizam ima oblik jednakokračnog trapeza). Kao i u prethodnim radovima, autori analiziraju rotacijsku krutost, zasebno uzrokovanu momentom, a zasebno horizontalnom silom, te potom i utjecaj uzdužne sile na rotacijsku krutost mehanizma i izvijanje.

U literaturi dostupan je i čitav niz istraživanja koja analiziraju karakteristične parametre različitih konstrukcijskih rješenja podatljivih mehanizama. Neka od njih koriste metode definirane u prethodno spomenutim radovima.

Henein i ostali 2002. godine predstavljaju tako osnovne principe projektiranja i konstrukcije podatljivih mehanizama ultravisoke preciznosti. Navode da se kombinacijom podatljivih mehanizama s odgovarajućim pogonom i sensorima postiže nanometarska točnost pozicioniranja. Opisuju primjere podatljivih mehanizama u opremi i instrumentima u sinkrotronskim akceleratorским postrojenjima [Henein et al., 2002].

Henein i ostali 2003. godine opisuju rotacijski podatljivi mehanizam, prikazan na Slici 2.11, koji se popularno naziva engl. *butterfly* mehanizam i koji se koristi kod međusatelitskih komunikacijskih sustava [Henein et al., 2003]. Koncept je detaljno projektiran i izrađen te su postignuti vrlo mali parazitni pomaci geometrijskog središta mehanizma (manje od $2 \mu\text{m}$ kod kuta rotacije od $\pm 10^\circ$).

Zelenika i ostali 2009. godine [Zelenika et al., 2009] provode nelinearnu parametarsku optimizaciju oblika podatljivih zglobova koji su u čestoj uporabi kod mikrosustava i uređaja za precizno pozicioniranje. Uspoređeni su parametri unaprijed definiranih i proizvoljnih oblika i to njihova: podatljivost, čvrstoća, faktor koncentracije naprezanja i parazitni pomaci.

Izračunate su i poprečna i aksijalna podatljivost te faktori koncentracije naprezanja. Autori pokazuju da relativne dimenzije proizvoljnih oblika nemaju utjecaja na dobiveno rješenje. Kod predefiniраниh oblika, varijacija relativnih dimenzija uzrokuje promjenu oblika. Nadalje, pokazuju da su proizvoljni oblici po rezultatima čvrstoće i podatljivosti ekvivalentni lisnatim oprugama s pravokutnim poprečnim presjekom. Za sve promatrane slučajeve pokazuje se da su poboljšanja u vidu čvrstoće i podatljivosti obrnuto proporcionalna veličini parazitnog pomaka zgloba. Analiza poprečnih i aksijalnih podatljivosti i faktora koncentracije naprezanja optimiziranih oblika pokazuju da oblici koji imaju najveću podatljivost u smjeru glavnog stupnja slobode gibanja, imaju veću koncentraciju naprezanja po pravcima ostalih stupnjeva slobode gibanja. Neki od analiziranih oblika zareza kratkog zgloba daju bolje rezultate od tradicionalnih oblika zareza, odnosno rezultiraju manjim naprezanjima, manjim parazitnim pomacima u smjeru glavnog stupnja slobode gibanja i manjom koncentracijom naprezanja po pravcima ostalih stupnjeva slobode gibanja. Zaključuju da optimizacija oblika zareza kratkog zgloba uvelike poboljšava performanse kratkog zgloba i treba biti uključena u standardnu proceduru konstrukcije mehanizama koji se temelje na takvim podatljivim elementima.

Teo i ostali 2010. godine predstavljaju pak tzv. polu–analitički model za aproksimaciju velikih nelinearnih progiba bilo koje konfiguracije podatljivih vitkih štapova vezanih čvrstom vezom [Teo et al., 2010]. Usvajanjem dva važna faktora prilikom odabira pristupa koji se koristi za opisivanje rotacijske krutosti podatljivog zgloba, osigurava se točnost i robusnost modela. Prvi faktor neželjeni je parazitni pomak zgloba u području velikih progiba, dok drugi faktor predstavlja promjenu rotacijske krutosti zgloba uzrokovanu promjenom položaja ekvivalentne opruge. Postavljen je empirijski izraz kojim se određuje položaj ekvivalentne opruge. Usporedbom s prije obrađenim teoretskim modelima, pokazuju da izvedeni polu–analitički model može točno predvidjeti oba faktora. Nekoliko godina kasnije Teo i ostali pokazuju alternativni pristup konstruiranja podatljivih paralelnih mehanizama (engl. *flexure-based parallel mechanism* – FPM) [Teo et al., 2013]. Pristup opisan u tome radu uključuje metodologiju konstruiranja koja objedinjuje klasičnu kinematiku s modernim geometrijskim optimizacijskim metodama. Metoda se primjenjuje za sintetiziranje i optimizaciju zgloba na temelju željenih karakteristika krutosti. Kod projektiranja su, na temelju željene dinamike, optimizirane i pokretne mase i krutosti cijelog mehanizma.

U ovom je dijelu rada dan širok pregled stanja tehnike na polju podatljivih mehanizama, a posebice rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama. To stvara preduvjete da se u nastavku rada izvrši analiza metoda proračuna ovdje analiziranih

mehanizama te tako pristupi kritičkoj analizi konstrukcijskih parametara koji utječu na njihovo ponašanje.

3 Matematička formulacija simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama

Nakon što je u dosadašnjim razmatranjima pojašnjena osnovna terminologija i dan osvrt na stanje tehnike u području istraživanja, u ovoj će cjelini biti opisana matematička formulacija simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma opterećenog momentom u području velikih deformacija, odnosno velikih kutova rotacije rotacijskog podatljivog mehanizma, razvijena u okviru doktorske disertacije.

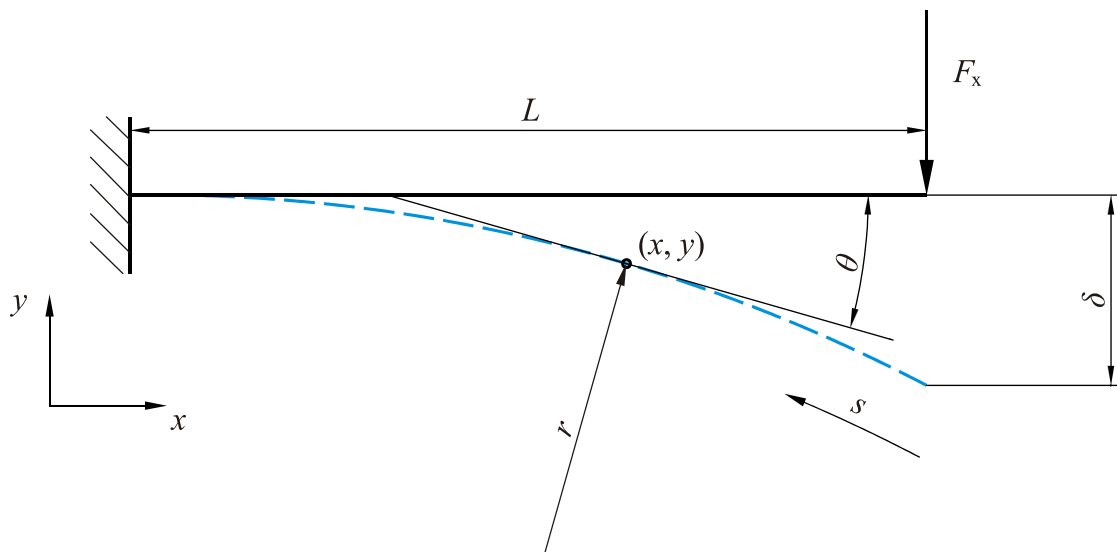
Prije prelaska na analitički izračun potrebno je pojasniti sljedeće:

- koncept linearnih i nelinearnih progiba,
- koncept krutosti i podatljivosti.

3.1 Koncept linearnih i nelinearnih progiba

Analiziranjem progiba vitke konzolne grede braća Jacob i John Bernoulli izvide prvi oblik jednadžbe elastične linije koja definira ovisnost progiba o momentu savijanja, ali u njihovom izrazu konstanta proporcionalnosti nije bila dobro procijenjena. Kasnije, na prijedlog D. Bernoullia, sina Johna Bernoullia, L. Euler je preoblikovao diferencijalnu jednadžbu elastične linije. Time je definiran Bernoulli – Eulerov zakon koji glasi da je moment savijanja M u bilo kojoj točki (x, y) elastične linije obrnuto proporcionalan polumjeru zakrivljenosti r konzolne

grede u danoj točki uzrokovanom djelovanjem opterećenja na gredu (Slika 3.1) [Fertis, 2006].



Slika 3.1 Vitka konzolna greda opterećena poprečnom silom

Iz navedene definicije proizlazi izraz [Fertis, 2006]

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E(s)I(s)} = \frac{d\theta}{ds} \quad (3.1)$$

gdje je $E(s)$ Youngov modul elastičnosti promjenjiv po duljini elastične linije, $I(s)$ aksijalni moment inercije promjenjiv po duljini elastične linije, s duljina elastične linije mjerena od slobodnog kraja konzolne grede, a θ je kut tangente na elastičnu liniju prema osi x . Izraz za zakrivljenost u pravokutnom koordinatnom sustavu poprima oblik

$$\frac{1}{r} = - \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.2)$$

Uvrštavanjem izraza (3.2) u (3.1) dobiva se [Fertis, 2006]

$$\frac{M}{E(s)I(s)} = - \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.3)$$

što rezultira nelinearnom diferencijalnom jednačbom drugog reda.

U većini inženjerskih primjena pretpostavlja se da je materijal konzolne grede elastičan, da je naprezanje linearno ovisno o deformaciji, te da poprečni presjeci grede i u deformiranom položaju ostaju okomiti na neutralnu os grede (pretpostavlja se da nema smicanja). Daljnja pojednostavljenja pretpostavljaju da je ovisnost momenta savijanja o progibu linearna, a uvođenje linearne ovisnosti pretpostavlja zanemarivanje male vrijednosti kvadrata nagiba tangente na elastičnu liniju, $(dx/dy)^2$. Pristup je opravdan u slučaju kada je progib mali u odnosu na duljinu konzolne grede i kada su naprezanja ispod granice elastičnosti. Također, modul elastičnosti i moment inercije najčešće imaju konstantnu vrijednost po duljini grede, pa se može pisati izraz koji vrijedi za male progibe [Brnić, 1991]

$$\frac{M}{EI} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.4)$$

Rješavanjem diferencijalne jednadžbe (3.4) dobivaju se izrazi za progib u ovisnosti o opterećenju, na slobodnom kraju konzolne grede [Brnić, 1991]

$$\delta = \frac{F_x L^3}{3EI} \quad (3.5)$$

za konzolnu gredu opterećenu poprečnom silom na slobodnom kraju, te [Brnić, 1991]

$$\delta = \frac{ML^2}{2EI} \quad (3.6)$$

za konzolnu gredu opterećenu momentom savijanja na slobodnom kraju.

U nekim se slučajevima pojavljuju strukturne nelinearnosti, što iziskuje nelinearnu analizu, a te nelinearnosti mogu se podijeliti u dvije kategorije [Howell, 2001]:

- Nelinearnosti materijala – slučajevi kada se Hookov zakon ne može primijeniti, a uključuju slučajeve u kojima se javlja plastičnost, nelinearna elastičnost, hiperelastičnost ili puzanje materijala.
- Geometrijske nelinearnosti – uzrokovane su velikim progibima koji mijenjaju prirodu problema a što, uz slučajeve velikih progiba, uključuje i povećanje krutosti uzrokovano naprezanjem i velike deformacije. Nelinearnosti uzrokovane velikim deformacijama moraju se uzeti u obzir ako su dovele do značajne promjene geometrije. Povećanje krutosti uzrokovano naprezanjem javlja se kada je krutost strukture ovisna o progibu. Jedan od primjera ovisnosti krutosti strukture o progibu je antiklastični efekt. Naime, kod grednih elemenata s porastom opterećenja raste

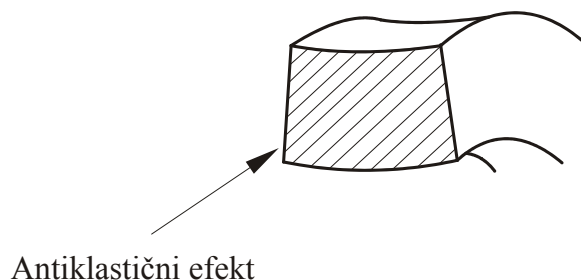
antiklastična (poprečna) zakrivljenost. Kako bi se utvrdila pojava antiklastične zakrivljenost potrebno je izvršiti kontrolu vrijednosti

$$\frac{b^2}{tr} \quad (3.7)$$

gdje je b širina, a t debljina poprečnog presjeka grede [Ashwell, 1950]. S porastom vrijednosti $b^2/(tr)$ dolazi do povećanja krutosti u poprečnom smjeru pa se u proračunu umjesto modula elastičnosti E , mora koristiti modificirani modul [Ashwell, 1950]

$$\frac{E}{1-\nu^2} \quad (3.8)$$

U izrazu (3.8), ν je Poissonov koeficijent. Za metale Poissonov koeficijent ν iznosi cca. 0,3 pa se uvrštavanjem u izraz (3.8) dobiva da najveće odstupanje modula elastičnosti za takve materijale iznosi cca. 10%. Na Slici 3.2 prikazana je pojava antiklastičkog efekta kod grednih elemenata. O antiklastičnom efektu bit će više riječi u nastavku rada kada će se utjecaj toga efekta uzeti u razmatranje pri numeričkoj analizi metodom konačnih elemenata.



Slika 3.2 Prikaz pojave antiklastičnog efekta kod grednog elementa

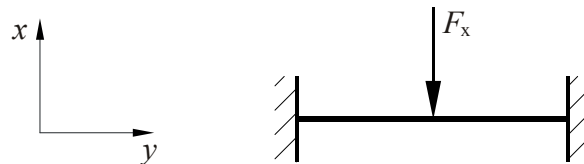
Geometrijske nelinearnosti česte su kod podatljivih mehanizama, a uzrokovane su velikim progibima podatljivih elemenata.

3.2 Koncept krutosti i podatljivosti

Krutost se definira kao otpornost tijela prema deformiranju. Na promjenu krutosti strukture može utjecati promjena naprezanja i vanjska sila [Howell, 2001].

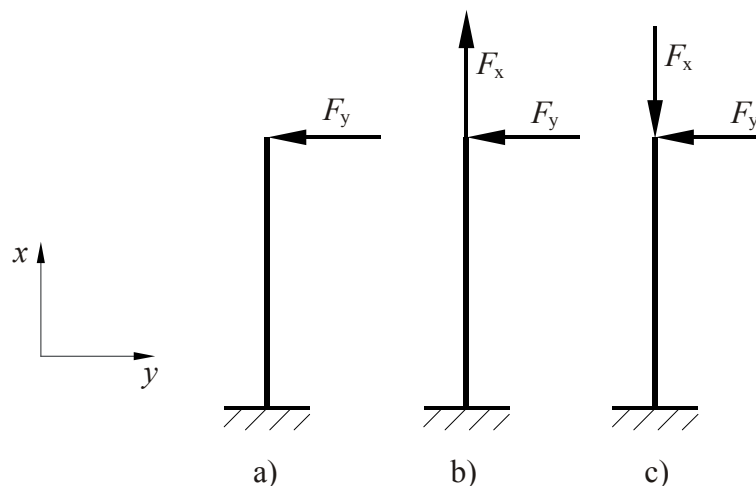
Povećanje krutosti uzrokovano naprežanjem javlja se kad se krutost strukture mijenja promjenom njenog progiba. S obzirom da krutost strukture mora biti poznata prije izračuna progiba, a u navedenom slučaju je, da bi se izračunala krutost, potrebno znati progib, problem

je nelinearan. Primjer povećanja krutosti zbog naprezanja je horizontalna greda ukliještena na oba kraja i opterećena poprečnom silom na sredini kako je prikazano na Slici 3.3. U ovom slučaju, porastom sile raste i vertikalni progib, ali rastom progiba dolazi do produljenja grede što uzrokuje povećanje uzdužne sile u gredi. Naprezanje uzrokovano uzdužnom deformacijom grede izaziva povećanje krutosti grede. Kako krutost ovisi o progibu, potrebno je provesti nelinearnu analizu a to zahtijeva iterativnu metodu rješavanja [Howell, 2001].



Slika 3.3 Horizontalna greda ukliještena na oba kraja opterećena poprečnom silom na sredini

Na Slici 3.4a prikazana je pak konzolna greda opterećena na slobodnom kraju poprečnom silom F_y pa je progib njene rubne točke definiran izrazom (3.5). Ako na slobodnom kraju konzole, kako je prikazano na Slici 3.4.b, djeluju istovremeno velika uzdužna vlačna sila F_x i poprečna sila F_y , djelovanje sile F_y uzrokuje progib slobodnog kraja dok djelovanje uzdužne vlačne sile F_x povećava otpor porastu progiba. Progib je manji nego kad ne djeluje sila F_x jer je došlo do tzv. povećanja krutosti zbog djelovanja uzdužne vlačne sile.



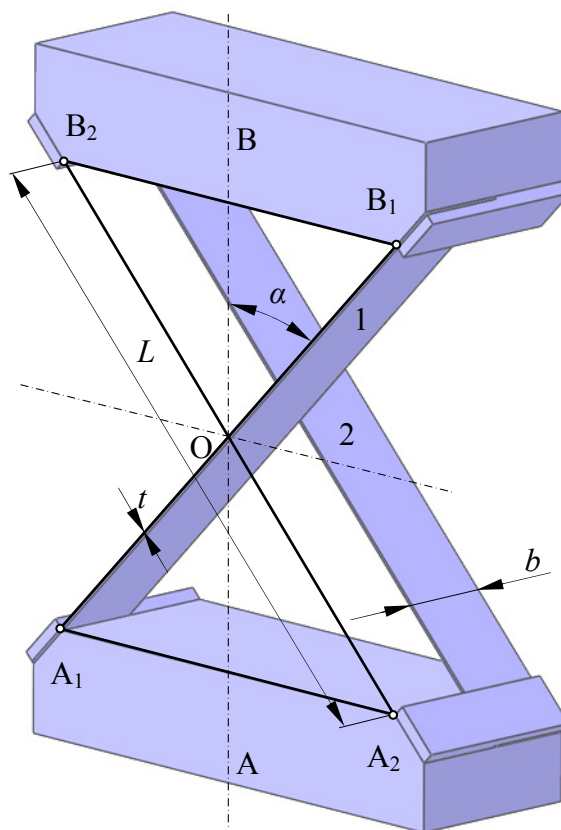
Slika 3.4 Vitki štap opterećen poprečnom silom (a), opterećen poprečnom i uzdužnom vlačnom silom (b), te opterećen poprečnom i uzdužnom tlačnom silom (c)

Ako bi na konzolnu gredu, uz poprečnu, djelovala i velika tlačna sila (Slika 3.4c), progib izazvan poprečnom silom F_y postaje krak uzdužne sile F_x i uzrokuje moment koji dodatno

povećava progib konzolne grede. U slučaju prikazanom na Slici 3.4c se, dakle, zbog djelovanja uzdužne tlačne sile i poprečne sile, krutost konzolne grede smanjila. U tom se slučaju podatljivost, jer je obrnuto proporcionalna krutosti strukture i definirana kao sklonost tijela prema deformiranju, povećala [Howell, 2001].

3.3 *Elastica metoda*

U okviru ove doktorske disertacije razvijen je analitički model za rješavanje rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama opterećenog momentom i to u području velikih deformacija. Analizirani rotacijski podatljivi mehanizam prikazan je na Slici 3.5.



Slika 3.5 Geometrijske karakteristike rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama

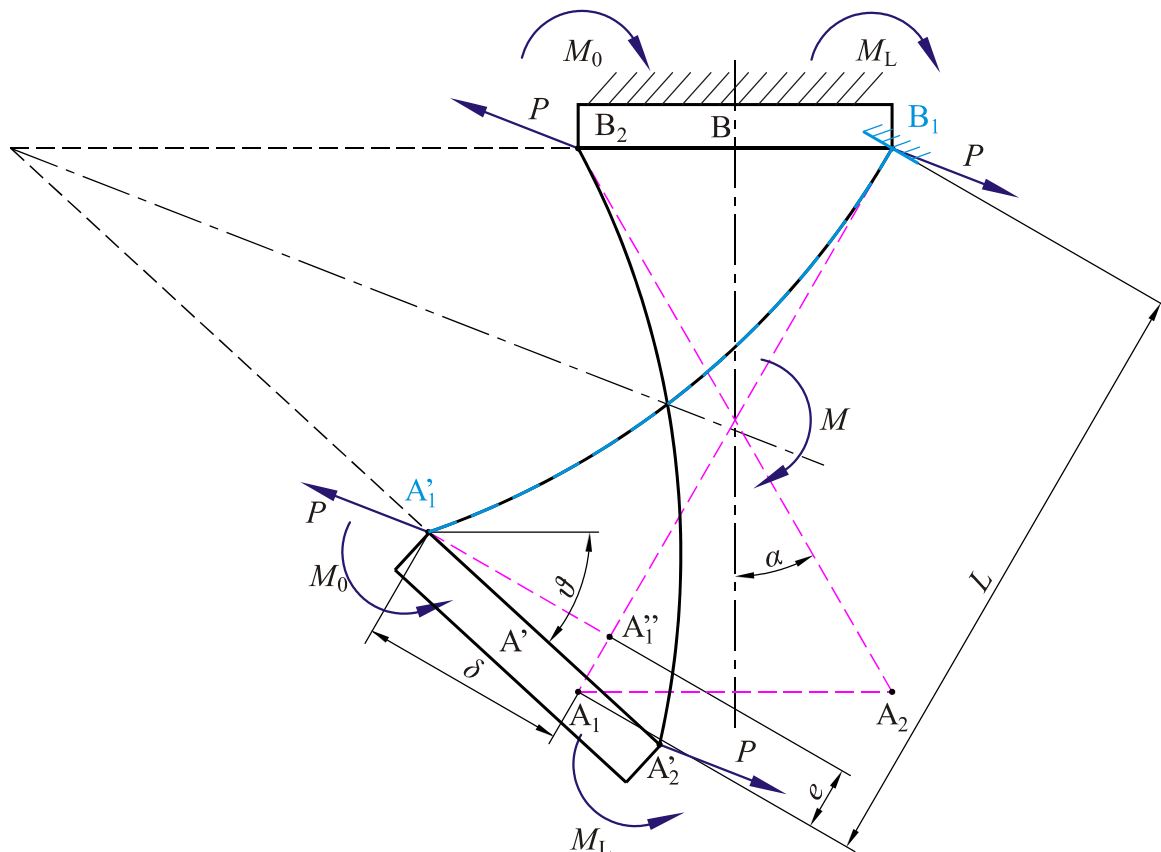
Uzet je u obzir mehanizam kod kojeg su lisnate opruge $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ simetrične u odnosu na vertikalnu središnju liniju i mimoilaze se na sredini aktivnih duljina L , pri čemu su iste debljine t , širine b , iz istog su materijala i oba su im kraja kruto spojena (ukliještena) za kruta tijela A i B. Problem se može promatrati kao dvodimenzijski pa se iz tog razloga često u literaturi navodi da se lisnate opruge sijeku iako se u stvarnosti mimoilaze. Lisnate opruge su

nagnute pod kutom α u odnosu na vertikalnu os.

Tijelo B ima ograničene sve stupnjeve slobode gibanja, dok tijelo A može rotirati u ravni xy u kojoj leži rotacijski podatljivi mehanizam. Zbog djelovanja opterećenja, kruto tijelo A se zakreće u odnosu na ravnotežni položaj $\overline{A_1A_2}$ u novi položaj $\overline{A_1'A_2'}$ pa vrijedi

$$\angle(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1'A_2'}) = \vartheta \quad (3.9)$$

Pomak krutog tijela A u zakrenuti položaj A' prikazan je na Slici 3.6.



Slika 3.6 Pomak krutog tijela A u položaj A'

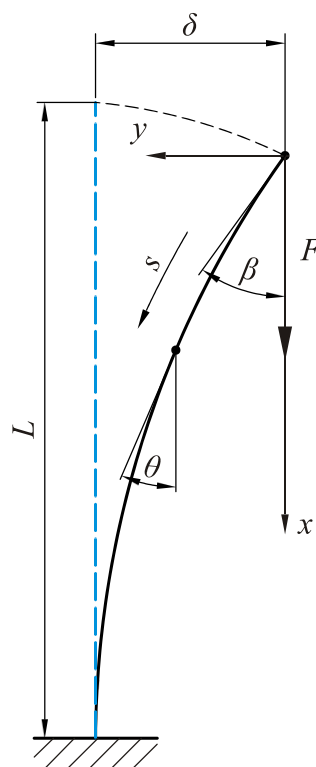
Svaka se opruga, koja je sastavnica podatljivog zgloba, promatra zasebno tj. kao vitka konzolna greda koja je na svom slobodnom kraju opterećena momentom i kosom silom. U ovom su slučaju spomenuti moment i kosa sila u stvari reakcije u uklještenjima, a posljedica su djelovanja ukupnog opterećenja na podatljivi zglob. Ako se na Slici 3.6 promatra lisnata opruga 1 čije su rubne točke A_1 i B_1 , vidljivo je da se ona može promatrati kao konzolna greda uklještena u točki B_1 čiji slobodni kraj A_1 pod djelovanjem sile P i momenta M_0 iz početnog položaja dolazi u položaj A_1' .

Definiranje analitičkog modela predviđanja ponašanja rotacijskog podatljivog mehanizma

prikazanog na Slici 3.6 iziskuje rješavanje točne diferencijalne jednačbe elastične linije lisnate opruge. Za rješavanje točne diferencijalne jednačbe na polju geometrijskih nelinearnosti odabran je u drugom poglavlju spomenuti pristup *Elastica* metode koju su definirali Timoshenko i Gere [Timoshenko, Gere 1961] uz poopćenja koja su uveli De Bona i Zelenika, a odnose se na slučajeve kada je vitka gredna konzola na svom slobodnom kraju opterećena kosom silom i momentom, a smjer koordinatnih osi određen je smjerom djelovanja kose sile [De Bona, Zelenika, 1997].

3.3.1 Rješavanje jednačbe elastične linije

U nastavku je opisana procedura izračuna elastične linije koju je, za slučaj vitkoga štapa uklještenoga na jednom kraju, a na slobodnom kraju opterećenog aksijalnom silom F čija vrijednost malo prelazi kritičnu vrijednost (vrijednost koja dovodi do izvijanja vitkog štapa) te koja ulazi u područje velikih deformacija, definirao Timoshenko [Timoshenko, Gere 1961]. Postavka problema prikazana je na Slici 3.7.



Slika 3.7 Vitki uklještenu štapa opterećen aksijalnom silom F čija je vrijednost malo veća od kritične vrijednosti koja dovodi do izvijanja (prema [Timoshenko, Gere 1961])

Točna diferencijalna jednačba elastične linije u navedenom slučaju ima oblik

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -Fy \quad (3.10)$$

Duljina kružnog luka s mjeri se od slobodnog kraja štapa.

Diferenciranjem (3.10) uz $dy/ds = \sin\theta$ dobiva se

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -F \sin\theta \quad (3.11)$$

Timoshenko uočava da je izraz (3.11) analogan diferencijalnoj jednadžbi koja definira fizikalno njihalo.

Množenjem izraza (3.11) s $d\theta$, integracijom te uzimajući u obzir rubni uvjet pri kojem je na slobodnom kraju $\theta = \beta$, dobiva se

$$\frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = -F (\cos\theta - \cos\beta) \quad (3.12)$$

Uvođenjem supstitucije

$$C^2 = \frac{F}{EI} \quad (3.13)$$

dobiva se

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2C^2 (\cos\theta - \cos\beta) \quad (3.14)$$

$$ds = \frac{1}{C\sqrt{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\beta}} \quad (3.15)$$

Duljina lisnate opruge može se izraziti jednadžbom [Timoshenko, Gere 1961]

$$L = \int_0^\beta ds \quad (3.16)$$

Uvrštavanjem izraza (3.15) u (3.16), a vodeći računa o granicama integracije, odnosno da kada se duljina luka s mijenja od 0 do L , kut θ se mijenja od 0 do β , dobiva se

$$L = \frac{1}{C\sqrt{2}} \int_0^\beta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\beta}} \quad (3.17)$$

$$L = \frac{1}{2C} \int_0^\beta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (3.18)$$

Uvode se nove varijable k i φ [Timoshenko, Gere 1961] tako da vrijedi

$$k = \sin \frac{\beta}{2} \quad (3.19)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (3.20)$$

A uvrštavanjem izraza (3.19) u (3.20) dobiva se

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin \varphi \quad (3.21)$$

Deriviranjem izraza (3.21) proizlazi

$$d\theta = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad (3.22)$$

Primjenom Pitagorinog trigonometrijskog identiteta i uvrštavanjem jednadžbe (3.20) u (3.22) dobiva se

$$d\varepsilon = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.23)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (3.19), (3.20) i (3.23) u (3.18), a vodeći računa o granicama integracije (kada se kut θ mijenja između 0 i β , $\sin \varphi$ se mijenja između 0 i 1, a φ od 0 do $\pi/2$), dobiva se

$$L = \frac{1}{C} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.24)$$

U izrazu (3.24) pojavljuje se nepotpuni eliptični integral prve vrste $F(k, \varphi)$ s modulom k i amplitudom φ koji ima oblik [Timoshenko, Gere 1961]

$$F(k, \varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.25)$$

U izrazu (3.25) φ_1 i φ_2 su granice integracije, a već je spomenuto da φ varira od 0 do $\pi/2$, pa izraz (3.25) poprima oblik

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.26)$$

$F(k)$ se naziva potpuni eliptični integral prve vrste s granicama integracije 0 i $\pi/2$ i modulom k [Timoshenko, Gere 1961]. O načinu rješavanju eliptičnih integrala prve vrste bit će riječi u nastavku rada. Sada se izraz (3.24) može pisati u obliku

$$L = \frac{1}{C} F(k) \quad (3.27)$$

Na osnovu izraza

$$dy = \sin \theta ds \quad (3.28)$$

definira se pomak slobodnog kraja vitkog štapa u horizontalnom smjeru.

Primjenom trigonometrijskih identiteta, te izraza (3.19), (3.20) i (3.21) dobiva se [Timoshenko, Gere 1961]

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2k \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (3.29)$$

Uvrštavanjem izraza (3.24) i (3.29) u izraz (3.28) dobiva se progib slobodnog kraja vitkog štapa [Timoshenko, Gere 1961]

$$\delta = \frac{2k}{C} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \quad (3.30)$$

Integracijom izraza (3.30), uzimajući u obzir granice integracije, vrijedi

$$\delta = -\frac{2k}{C} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{2k}{C} \quad (3.31)$$

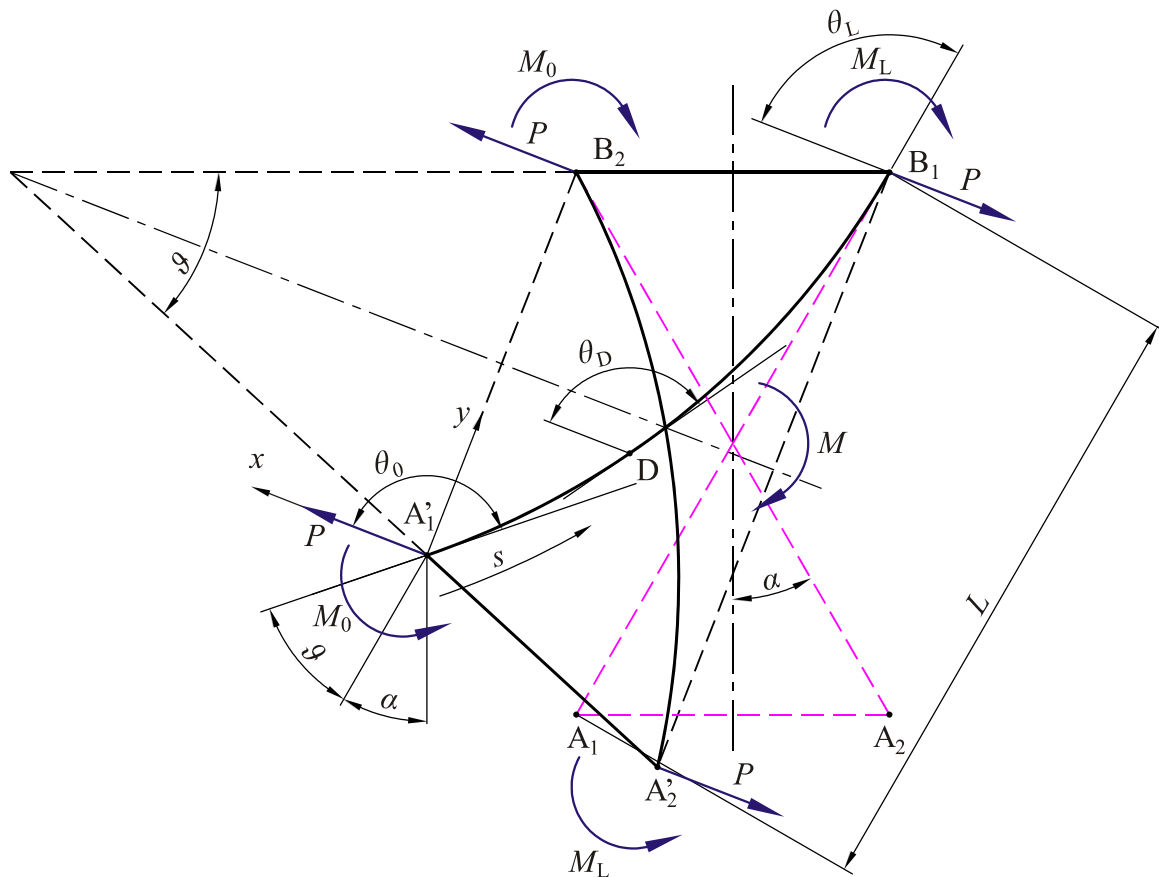
3.3.2 Analitički model rješavanja rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama

De Bona i Zelenika [De Bona, Zelenika, 1997] proširili su Timoshenkovu metodu i riješili opći slučaj kada je uklješteni vitki štapa s početnom zakrivljenošću na svom slobodnom kraju opterećen kosom silom i momentom i upravo je taj pristup temelj na kojem je u ovoj disertaciji razvijen analitički model rješavanja rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama.

Simetrala kuta rotacije ϑ rotacijskog podatljivog mehanizma prikazanog na Slici 3.5, definiranog izrazom (3.9) je, u slučaju mehanizma opterećenog samo momentom M , os simetričnosti cijelog sustava [Haringx, 1949]. Također, opruge $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ su, kako je

vidljivo na Slici 3.6, simetrične u odnosu na vertikalnu središnju liniju mehanizma i sijeku se na sredini duljina L te, kako je već istaknuto, imaju istu debljinu t , širinu b , iz istog su materijala i spregnute su između krutih tijela A i B. Navedene simetričnosti pojednostavljaju određivanje reakcija u uklještenjima. Može se pokazati da su u navedenom slučaju reakcijske sile P jednakog intenziteta i djeluju paralelno s osi simetrije, a reakcijski momenti koji djeluju u simetričnim točkama su jednaki [Haringx, 1949]. Iz Slike 3.6 vidljivo je tako da u točkama A_1' i B_2 djeluju reakcijski momenti M_0 , a u točkama A_2' i B_1 momenti M_L .

Na Slici 3.8 prikazan je rotacijski podatljivi mehanizam u zakrenutom položaju, a za analitičku definiciju ponašanja mehanizma promatra se posebno vitka konzolna greda $\overline{A_1'B_1}$ opterećena na svom slobodnom kraju kosom silom P i momentom M_0 . Ishodište koordinatnog sustava smješteno je na slobodnom kraju konzolne grede $\overline{A_1'B_1}$ i nalazi se u točki A_1 kada je rotacijski mehanizam u neopterećenom položaju, a u točki A_1' kada je mehanizam opterećen momentom M . Os x , prema preporuci u referenci [De Bona, Zelenika, 1997], ima smjer i orijentaciju kao i sila P .



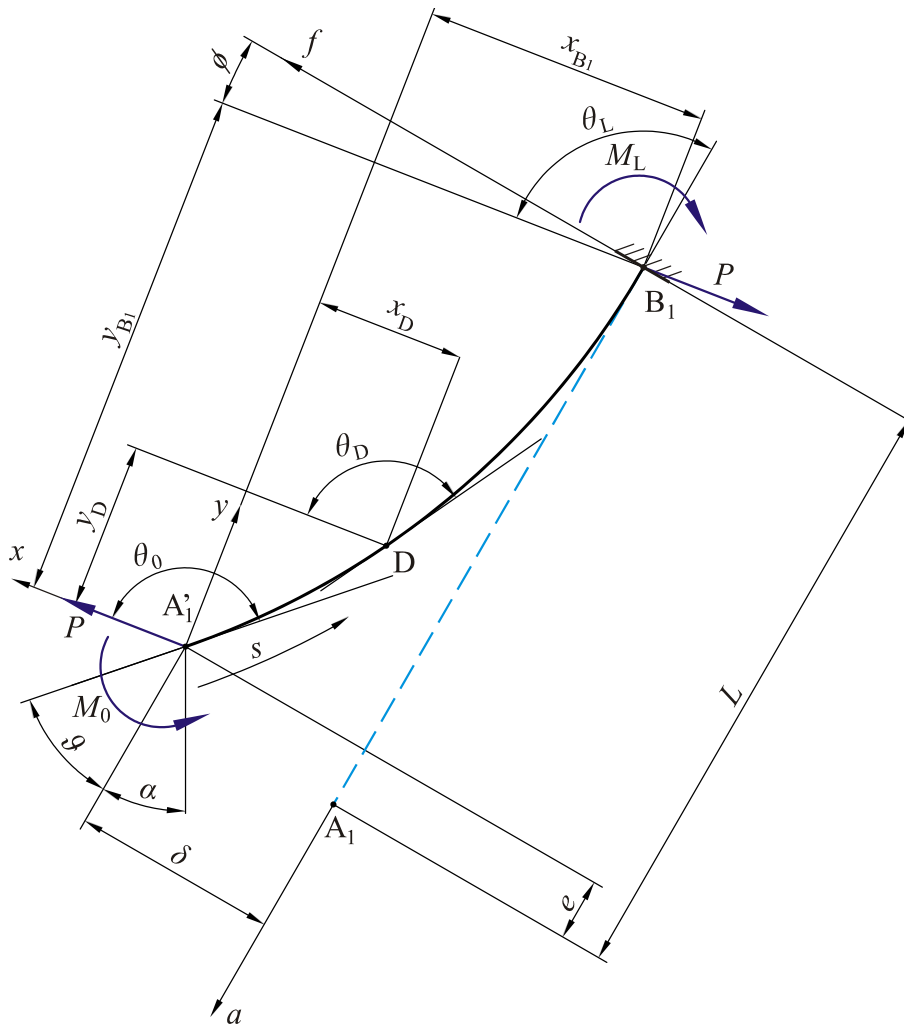
Slika 3.8 Karakteristični parametri rotacijskog podatljivog mehanizma

Diferencijalna jednačba elastične linije (3.1) s konstantnim modulom elastičnosti E i konstantnim momentom inercije I je [Fertis, 2006]

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{ds} \quad (3.32)$$

Duljina kružnog luka s mjeri se od slobodnog kraja elastične linije.

Preglednosti radi, na Slici 3.9 prikazana je samo lisnata opruga $\overline{A_1B_1}$, koja je dio rotacijskog podatljivog mehanizma prikazanog na Slici 3.8.



Slika 3.9 Lisnata opruga $\overline{A_1B_1}$ u deformiranom položaju

Na elastičnoj liniji u proizvoljnoj točki D s koordinatama (x_D, y_D) vrijedi jednačba ravnoteže momenata

$$M_D = -M_0 + Py \quad (3.33)$$

Uvrštavanjem izraza (3.33) u jednačbu elastične linije (3.32) dobiva se

$$EI \frac{d\theta}{ds} = M_0 - Py \quad (3.34)$$

Analogno prethodno učinjenom (izraz 3.11), deriviranjem izraza (3.34) po s proizlazi sada

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -P \frac{dy}{ds} \quad (3.35)$$

a uvrštavanjem (3.28) u (3.35) dobiva se

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -P \sin \theta \quad (3.36)$$

Nakon dijeljenja izraza (3.36) s EI i množenja s $d\theta$ proizlazi

$$d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) \frac{d\theta}{ds} = -\frac{P}{EI} \sin \theta d\theta \quad (3.37)$$

a nakon integracije izraz (3.37) poprima oblik

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = C^2 \cos \theta + C_1 \quad (3.38)$$

gdje je C pomoćni faktor i iznosi

$$C = \frac{P}{EI} \quad (3.39)$$

Konstanta integracije C_1 izračunava se rješavanjem izraza (3.34) i (3.38) uzimajući u obzir rubni uvjet u točki $A_1'(0, 0)$ (slobodni kraj lisnate opruge) gdje vrijedi

$$\begin{aligned} s &= y = 0 \\ \theta &= \theta_0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Kut θ_0 je kut tangente elastične linije prema osi x u točki A_1' .

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (3.40) u izraz (3.34) dobiva se

$$\frac{M_0}{EI} = \frac{d\theta}{ds} \quad (3.41)$$

a uvrštavanjem u (3.38) dobiva se

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_0}{EI}\right)^2 - C^2 \cos \theta_0 \quad (3.42)$$

Izraz (3.38) poprima onda oblik

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 2C^2 \left[\cos\theta - \cos\theta_0 + \frac{1}{2C^2} \left(\frac{M_0}{EI}\right)^2 \right] \quad (3.43)$$

Usporedbom izraza (3.43) s izrazom (3.12) uočava se analogija pa se može uvesti supstitucija

$$\cos\varepsilon = \cos\theta_0 - \frac{1}{2C^2} \left(\frac{M_0}{EI}\right)^2 \quad (3.44)$$

Uočava se da ε ovisi o kutu θ_0 kose sile P prema tangenti na elastičnu liniju na slobodnom kraju lisnate opruge, o momentu M_0 ali, budući da vrijedi (3.39), i o sili P .

U slučaju kada je $M_0 = 0$ kut θ poprima vrijednost θ_0 i problem postaje identičan onome čije je rješenje dao Timoshenko, odnosno tada je $\theta_0 = \varepsilon$.

Uvrštavanjem izraza (3.44) u izraz (3.43) dobiva se

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 2C^2 [\cos\theta - \cos\varepsilon] \quad (3.45)$$

Sređivanjem izraza (3.45) po ds i uzimajući u obzir izraz za kosinus dvostrukog kuta dobiva se

$$ds = \frac{1}{C\sqrt{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon}{2}}} \quad (3.46)$$

$$ds = \frac{1}{C\sqrt{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} - 1 + \sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon}{2}}} \quad (3.47)$$

$$ds = \frac{1}{2C} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\varepsilon}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \quad (3.48)$$

Prema Timoshenku, uvode se supstitucije

$$k = \sin\frac{\varepsilon}{2} \quad (3.49)$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{k} \quad (3.50)$$

Deriviranjem izraza (3.50) dobiva se

$$\frac{1}{2} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = k \cos\varphi d\varphi \quad (3.51)$$

pa, primjenom Pitagorinog trigonometrijskog identiteta i izraza (3.50) proizlazi

$$\frac{d\theta}{k \cos \varphi} = \frac{2d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.52)$$

U izraz (3.48) uvrštavaju se supstitucije (3.49) i (3.50) te se dobiva

$$ds = \frac{1}{2C} \frac{d\theta}{k \cos \varphi} \quad (3.53)$$

Iz Slike 3.9 uočava se da, ako duljina kružnog luka s poprima vrijednosti od 0 do L , granice integracije su kutovi tangenti na elastičnu liniju prema osi x u rubnim točkama θ_0 i θ_L , pa se može pisati

$$L = \int_0^L ds = \frac{1}{2C} \int_{\theta_L}^{\theta_0} \frac{d\theta}{k \cos \varphi} \quad (3.54)$$

Iz Slike 3.8 uočava se da vrijedi

$$\theta_0 = \frac{1}{2}(\pi + 2\alpha + \mathcal{G}) \quad (3.55)$$

$$\theta_L = \frac{1}{2}(\pi + 2\alpha - \mathcal{G}) \quad (3.56)$$

Uzimajući u obzir jednadžbu (3.52), izraz (3.54) poprima oblik

$$L = \int_0^L ds = \frac{1}{C} \int_{\varphi_L}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.57)$$

gdje su φ_0 i φ_L granice integracije. Gornja granica integracije φ_0 izračunava se uvrštavanjem izraza (3.55) u izraz (3.50), dok se donja granica φ_L integracije izračunava uvrštavanjem izraza (3.56). Dobiva se tako

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{1}{k} \sin \frac{\pi + 2\alpha + \mathcal{G}}{4}\right) \quad (3.58)$$

te

$$\varphi_L = \arcsin\left(\frac{1}{k} \sin \frac{\pi + 2\alpha - \mathcal{G}}{4}\right) \quad (3.59)$$

Uočava se da određivanje duljine lisnate opruge (3.57) zahtijeva rješavanje nepotpunih eliptičnih integrala prve vrste definiranih izrazom (3.25) s amplitudama φ_0 ili φ_L i modulom k

pa se može pisati

$$L = \frac{1}{C} F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0} \quad (3.60)$$

Nadalje, potrebno je definirati položaj točke B_1 (uklještenje lisnate opruge) u koordinatnom sustavu xy . Polazište određivanja ordinate točke B_1 (x_{B1} , y_{B1}) je jednadžba (3.28), a uvrštavanjem izraza (3.29) i (3.57) dobiva se

$$dy = 2k \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{C \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2k}{C} \sin \varphi d\varphi \quad (3.61)$$

Integracijom izraza (3.61), a uzimajući u obzir da kada kut φ poprima vrijednosti između φ_0 i φ_L , ordinata točke B_1 poprima vrijednosti od 0 do y_{B1} , izraz poprima oblik

$$y_{B1} = \int_0^{y_{B1}} dy = \frac{2k}{C} \int_{\varphi_L}^{\varphi_0} \sin \varphi d\varphi \quad (3.62)$$

Dobiva se

$$y_{B1} = -\frac{2k}{C} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_L) \quad (3.63)$$

Analogno, definiranje apscise točke B_1 počinje jednadžbom

$$dx = \cos \theta ds \quad (3.64)$$

Temeljem trigonometrijskog identiteta da je

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.65)$$

izraz (3.64) poprima oblik

$$dx = \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) ds \quad (3.66)$$

pa, uvrštavanjem izraza (3.50) i (3.57), oblik

$$dx = (1 - 2k^2 \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{C \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.67)$$

$$dx = \frac{d\varphi}{C \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{2k^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{C \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.68)$$

$$dx = \frac{d\varphi}{C\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{2d\varphi}{C\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{2(1-k^2 \sin^2 \varphi)d\varphi}{C\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.69)$$

Uvrštavanjem (3.57) dobiva se

$$dx = ds - 2ds + \frac{2}{C}\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (3.70)$$

$$dx = \frac{2}{C}\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - ds \quad (3.71)$$

Integracijom izraza (3.71) dobiva se

$$x_{B1} = \frac{2}{C} \int_{\varphi_L}^{\varphi_0} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - L \quad (3.72)$$

U izrazu (3.72) pojavljuje se tzv. nepotpuni eliptični integral druge vrste $E(k, \varphi)$ s modulom k i amplitudama φ_0 ili φ_L oblika

$$E(k, \varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (3.73)$$

pa se izraz (3.72) može pisati u obliku

$$x_{B1} = \frac{2}{C} E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0} - L \quad (3.74)$$

O načinu rješavanju eliptičnih integrala druge vrste bit će riječi u nastavku rada.

Ako su granice integracije $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = \pi/2$, izraz (3.73) može se pisati u obliku

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (3.75)$$

i naziva se potpunim eliptičnim integralom druge vrste s modulom k .

Koordinate točke B_1 mogu se izraziti i u normaliziranom obliku, a dobivaju se dijeljenjem jednadžbi (3.63) i (3.74) s duljinom lisnate opruge L

$$\frac{y_{B1}}{L} = -\frac{2k}{LC} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_L) \quad (3.76)$$

$$\frac{x_{B1}}{L} = \frac{2}{LC} E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0} - 1 \quad (3.77)$$

pa uzimajući u obzir (3.60) izrazi se mogu pisati u obliku

$$\frac{y_{B1}}{L} = -\frac{2k}{F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0}} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_L) \quad (3.78)$$

$$\frac{x_{B1}}{L} = \frac{2E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0}}{F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0}} - 1 \quad (3.79)$$

Sada je moguće postaviti izraze za određivanje koordinata točke D (x_D , y_D) tako da se u izrazima (3.63) i (3.74) promijeni donja granica integracije φ_L s granicom integracije koja se dobije kada se u izraz (3.50) uvrsti vrijednost kuta tangente na elastičnu liniju u točki D prema osi x , θ_D . Promjenom donje granice integracije u izrazima (3.63) i (3.74) određen je položaj točke D u ravnini xy :

$$x_D = \frac{2}{C} E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_D}^{\varphi_0} - L \quad (3.80)$$

$$y_D = -\frac{2k}{C} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_D) \quad (3.81)$$

Koordinate točke D mogu se izraziti u normaliziranom obliku dijeljenjem jednadžbi (3.80) i (3.81) s duljinom kružnog luka elastične linije u točki D mjerene od slobodnog kraja lisnate opruge, pa se analogno postupku provedenom pri normalizaciji koordinata točke B₁ dobiva

$$\frac{y_D}{s} = -\frac{2k}{F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_D}^{\varphi_0}} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_D) \quad (3.82)$$

$$\frac{x_D}{s} = \frac{2E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_D}^{\varphi_0}}{F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_D}^{\varphi_0}} - 1 \quad (3.83)$$

Kako bi se jednostavnije odredio pomak slobodnog kraja e (ili skraćenje) u smjeru osi a i progib δ lisnate opruge (cf. Sliku 3.9), potrebno je postaviti novi koordinatni sustav s ishodištem u uklještenju lisnate opruge, u točki B₁. Iz Slike 3.9 vidljivo je da je apscisa f novog koordinatnog sustava okomita na početni položaj opruge, a na osi ordinate a leži lisnata opruga u neopterećenom položaju. Progib lisnate opruge δ i pomak e definirani su koordinatama točke A₁' u koordinatnom sustavu fa .

Prema Slici 3.9 za prijelaz iz koordinatnog sustava xy u sustav fa vrijedi

$$\delta = f_{A1'} = y_{B1} \cos \phi - x_{B1} \sin \phi \quad (3.84)$$

$$e = L - a_{A1'} = L - (x_{B1} \cos \phi + y_{B1} \sin \phi) \quad (3.85)$$

Kut ϕ je, prema Slici 3.9, kut apscise f prema apscisi x i iznosi

$$\phi = \alpha - \frac{\vartheta}{2} \quad (3.86)$$

Progib i skraćenje lisnate opruge izraženi u normaliziranom obliku glase

$$\frac{\delta}{L} = \frac{y_{B1}}{L} \cos \phi - \frac{x_{B1}}{L} \sin \phi \quad (3.87)$$

$$\frac{e}{L} = 1 - \left(\frac{x_{B1}}{L} \cos \phi + \frac{y_{B1}}{L} \sin \phi \right) \quad (3.88)$$

Prema Slici 3.9 određuje se položaj točke D (f_D , a_D) u koordinatnom sustavu fa , pa vrijedi

$$f_D = \sin \phi (x_D - x_{B1}) + \cos \phi (y_{B1} - y_D) \quad (3.89)$$

$$a_D = \cos \phi (x_{B1} - x_D) + \sin \phi (y_{B1} - y_D) \quad (3.90)$$

Prilikom izračuna rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama poznat je kut rotacije mehanizma ϑ , dok je u izrazima (3.58) i (3.59) koji definiraju granice integracije φ_0 i φ_L modul eliptičnih integrala k nepoznata veličina i treba ga izračunati iterativnim postupkom. Izraz koji omogućuje izračun modula k , proizlazi i geometrijske relacije (cf. Sliku 3.9)

$$|x_{B1}| = \left| L \sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} \right| \quad (3.91)$$

Obzirom da prema Slici 3.9 uvijek vrijedi

$$\begin{aligned} x_{B1} &< 0 \\ L \sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} &> 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

iz izraza (3.91) mogu se ukloniti znakovi apsolutnih vrijednosti na sljedeći način

$$-x_{B1} = L \sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (3.93)$$

Uvrštavanjem izraza (3.74) dobiva se

$$-\left(\frac{2}{C}E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0} - L\right) = L \sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (3.94)$$

$$-\frac{2}{C}E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0} = L \left(\sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} - 1 \right) \quad (3.95)$$

pa uvrštavanjem (3.60) proizlazi

$$-\frac{2}{C}E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0} = \frac{1}{C}F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0} \left(\sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} - 1 \right) \quad (3.96)$$

Nakon sređivanja izraza (3.96) dobiva se

$$\frac{E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0}}{F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (3.97)$$

Dobiven je izraz pomoću kojeg se iterativnim postupkom može izračunati modul k .

S obzirom da su eliptični integrali dani izrazima (3.25) i (3.73) definirani samo za slučajeve kada je $|k| \leq 1$ [Haringx, 1949], potrebno je provjeriti koje sve vrijednosti modul k može poprimiti. Korištenjem trigonometrijskog identiteta danog izrazom (3.65) dobiva se

$$\cos \varepsilon = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.98)$$

pa uvrštavanjem izraza (3.44) i (3.49) u (3.98) proizlazi

$$\cos \theta_0 - \frac{1}{2C^2} \left(\frac{M_0}{EI} \right)^2 = 1 - 2k^2 \quad (3.99)$$

Sređivanjem izraza po k vrijedi

$$k = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_0 + \frac{1}{2C^2} \left(\frac{M_0}{EI} \right)^2}{2}} \quad (3.100)$$

Iz izraza (3.100) zaključuje se da je modul k uvijek realan pozitivan broj, ali da može poprimiti vrijednosti $k > 1$ kada vrijedi uvjet

$$\frac{1}{2C^2} \left(\frac{M_0}{EI} \right)^2 - \cos \theta_0 > 1 \quad (3.101)$$

Stoga je, za slučajeve kada je $|k| > 1$, potrebno uvesti supstitucije predložene u radu [Van Wijngaarden, 1949], odnosno uvesti daljnje pomoćne varijable k^* i φ^*

$$k^* = \frac{1}{k} \quad (3.102)$$

$$k \sin \varphi = \sin \varphi^* \quad (3.103)$$

Granice integracije se u tom slučaju dobivaju modificiranjem izraza (3.58) i (3.59) te iznose

$$\varphi_0^* = \arcsin \left(k^{*2} \sin \frac{\pi + 2\alpha + \mathcal{G}}{4} \right) \quad (3.104)$$

$$\varphi_L^* = \arcsin \left(k^{*2} \sin \frac{\pi + 2\alpha - \mathcal{G}}{4} \right) \quad (3.105)$$

Uvođenjem supstitucija (3.102) i (3.103) u izraze za nepotpune eliptične integrale definirane izrazima (3.25) i (3.73) moguće je dobiti izraze za izračun nepotpunih eliptičnih integrala $F(k, \varphi_1)$ i $E(k, \varphi_1)$ ovisne o varijablama k^* i φ_1^* [De Bona, Zelenika, 1997]

$$E(k, \varphi_1) = \frac{1}{k^*} E(k^*, \varphi_1^*) - \frac{1-k^{*2}}{k^*} F(k^*, \varphi_1^*) \quad (3.106)$$

$$F(k, \varphi_1) = k^* F(k^*, \varphi_1^*) \quad (3.107)$$

Izraz (3.97), uzimajući u obzir (3.106) i (3.107), poprima oblik

$$\frac{1}{k^{*2}} \left(1 - \frac{E(k^*, \varphi^*) \Big|_{\varphi_L^*}^{\varphi_0^*}}{F(k^*, \varphi^*) \Big|_{\varphi_L^*}^{\varphi_0^*}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \sin \alpha \cos \frac{\mathcal{G}}{2} \right) \quad (3.108)$$

Modul k (odnosno k^*) pronalazi se iterativnim postupkom koristeći uvjete (3.97) i (3.108).

U konstrukcijskoj se praksi eliptični integrali najčešće primjenjuju za rješavanje kontaktnih problema (ležajevi, zupčanici, kinematički oslonci i dr.) [Harris, Kotzalas, 2006]. Obzirom da je, zbog iterativnih postupaka rješavanja gornjih izraza eliptične integrale potrebno višekratno računati, preporuča se pak da se za taj izračun koriste neki od odgovarajućih približnih algoritama koji se temelje na interpolacijskim postupcima [De Bona, Zelenika, 1997]. U referenci [De Bona, Zelenika, 1997] opisani su slučajevi kada se pri rješavanju eliptičnih integrala približnim metodama mogu javiti znatnije pogreške (i do 20%). Pokazuje se stoga da

se nepotpuni eliptični integrali prve vrste mogu točno računati primjenom Landenovih transformacija (engl. *Landen transformation method*), a potpuni eliptični integrali prve i druge vrste primjenom metode aritmetičko–geometrijske sredine (engl. *arithmetic–geometric mean method* – AGM). Za izračun nepotpunih eliptičnih integrala druge vrste niti jedna od približnih metoda ne daje zadovoljavajuće rezultate u cijelom rasponu vrijednosti parametara integracije, pa je kod izračuna tih integrala preporučljivo numeričko integriranje [De Bona, Zelenika, 1997].

Nakon definiranja modula k , iz jednadžbi (3.60) i (3.49) mogu se izračunati konstante C i ε koje su potrebne za izračun reakcija u uklještenjima. Prema izrazu (3.39) se tako izračunava reakcijska sila u uklještenjima koja iznosi

$$P = CEI \quad (3.109)$$

Prema Slici 3.9 u uklještenju A_1' vrijede rubni uvjeti $s = 0$ i $\theta = \theta_0$, pa se moment M_0 izračunava uvrštavanjem izraza (3.45) u jednadžbu elastične linije (3.32) iz čega proizlazi

$$\frac{M_0}{EI} = C\sqrt{2(\cos\theta_0 - \cos\varepsilon)} \quad (3.110)$$

Uvrštavanjem (3.109) u (3.110) i sređivanja po M_0 taj izraz poprima oblik

$$M_0 = P\sqrt{2(\cos\theta_0 - \cos\varepsilon)} \quad (3.111)$$

Analogno navedenome, uzimajući u obzir rubne uvjete u točki B_1 ($s = L$ i $\theta = \theta_L$), dobiva se moment M_L koji će biti

$$M_L = P\sqrt{2(\cos\theta_L - \cos\varepsilon)} \quad (3.112)$$

Sada se može izračunati moment M potreban za dobivanje određenog kuta rotacije ϑ rotacijskog podatljivog mehanizma. Iz Slike 3.8 vidljivo je da se može postaviti jednadžba ravnoteže momenata oko osi simetrije kuta definiranog s (3.9) koja glasi

$$M = M_0 + M_L + PL \sin\alpha \sin\frac{\vartheta}{2} \quad (3.113)$$

Nakon uvrštavanja (3.111) i (3.112) u (3.113) dobiva se

$$M = P\left(\sqrt{2(\cos\theta_0 - \cos\varepsilon)} + \sqrt{2(\cos\theta_L - \cos\varepsilon)} + L \sin\alpha \sin\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (3.114)$$

Izračunavanjem momenta M , uz poznati kut rotacije ϑ , omogućen je izračun rotacijske

krutosti K mehanizma prema izrazu

$$K = \frac{M}{\vartheta} \quad (3.115)$$

Uvrštavanjem izraza (3.109) i (3.114) u izraz (3.115) dobiva se jednadžba

$$\frac{K}{EI} = \frac{C \left(\sqrt{2(\cos \theta_0 - \cos \varepsilon)} + \sqrt{2(\cos \theta_L - \cos \varepsilon)} + L \sin \alpha \sin \frac{\vartheta}{2} \right)}{\vartheta} \quad (3.116)$$

pa se uz (3.60) dobiva

$$\frac{KL}{EI} = F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_L}^{\varphi_0} \frac{\left(\sqrt{2(\cos \theta_0 - \cos \varepsilon)} + \sqrt{2(\cos \theta_L - \cos \varepsilon)} + L \sin \alpha \sin \frac{\vartheta}{2} \right)}{\vartheta} \quad (3.117)$$

gdje je $KL/(EI)$ normalizirana vrijednost rotacijske krutosti, a njome se mogu usporediti rotacijske krutosti rotacijskih podatljivih mehanizama različitih geometrija i materijala lisnatih opruga.

Najveće naprezanje u mehanizmu javlja se u uklještenju lisnate opruge kao posljedica momenata savijanja te se računa prema izrazu

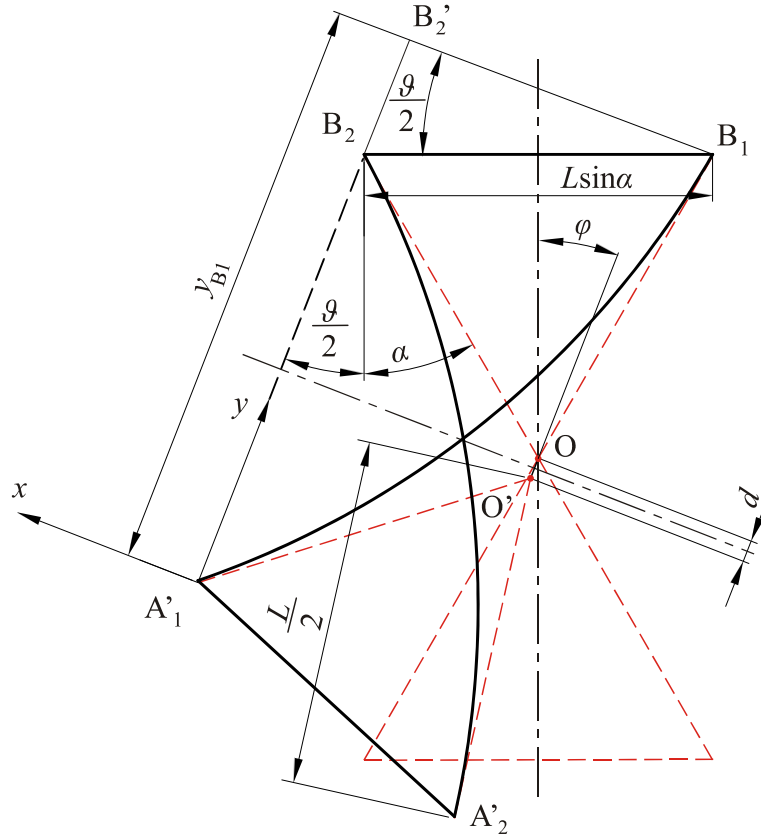
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{0/L} t}{2I} \quad (3.118)$$

gdje je t debljina lisnate opruge [Brnić, 1991]. U izraz (3.118) uvrštava se ona vrijednost momenta u uklještenju koja ima veću vrijednost. Prema izrazima (3.111) i (3.112) mjerodavan je moment u točki u kojoj je kut tangente na elastičnu liniju prema osi x najveći ($\theta_0 > \theta_L$) pa je u slučaju koji je prikazan na Slici 3.8 mjerodavan moment M_0 .

3.4 Parazitni pomaci i stabilnost rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama

Već je rečeno da je za analizu ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama od velike važnosti odrediti parazitni pomak mehanizma koji je definiran veličinom parazitnog pomaka d i njegovom fazom φ . Na Slici 3.10 prikazana je točka O u kojoj se lisnate opruge sijeku u neopterećenom položaju, a koja je geometrijsko središte rotacijskog podatljivog mehanizma. Zakretanjem krutog tijela A za kut ϑ dolazi do pomicanja geometrijskog središta iz točke O u točku O' . Točka O' definirana je sjecištem tangenti na

elastične linije lisnatih opruga u točkama A_1' i A_2' . Iz Slike 3.10 vidljivo je da je točka O nepomična u odnosu na fiksno tijelo B . Veličina parazitnog pomaka d definirana je udaljenošću $|OO'|$ dok je faza φ kut dužine $\overline{OO'}$ prema vertikalnoj osi simetrije mehanizma.



Slika 3.10 Parazitni pomak rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama

Prema Slici 3.10 veličina parazitnog pomaka d može se pronaći iz geometrije mehanizma primjenom izraza

$$|OO'| + |B_2O| \cos\left(\alpha + \frac{\vartheta}{2}\right) + |A_1'O| \cos\left(\alpha + \frac{\vartheta}{2}\right) = |A_1'B_2'| - |B_2B_2'| \quad (3.119)$$

Izraz (3.119) može se pisati i u obliku

$$d + \frac{L}{2} \cos\left(\alpha + \frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{L}{2} \cos\left(\alpha + \frac{\vartheta}{2}\right) = y_{B1} - L \sin \alpha \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (3.120)$$

Uvrštavanjem izraza (3.63) dobiva se

$$d = \frac{2k}{C} (\cos \varphi_L - \cos \varphi_0) - L \sin \alpha \sin \frac{\vartheta}{2} - L \cos\left(\alpha + \frac{\vartheta}{2}\right) \quad (3.121)$$

Nakon sređivanja jednadžba (3.121) poprima oblik

$$d = \frac{2k}{C}(\cos \varphi_L - \cos \varphi_0) - L \cos \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (3.122)$$

Iz Slike 3.10 vidljivo je da faza φ parazitnog pomaka iznosi

$$\varphi = \frac{\vartheta}{2} \quad (3.123)$$

Faza parazitnog pomaka ovisi samo o kutu ϑ jer je jedan krak kuta φ simetrala mehanizma, a krak na kojem leži $\overline{OO'}$ je okomica na simetralu kuta definiranog izrazom (3.9).

Potrebno je uvesti bezdimenzijski parametar, tj. normaliziranu veličinu parazitnog pomaka d/L kako bi se ona mogla uspoređivati pri ocjeni rotacijske točnosti i preciznosti rotacijskih mehanizama različitih geometrija i odgovarajućih načina proračuna. Bezdimenzijski parametar d/L će, na osnovu jednadžbe (3.122), biti

$$\frac{d}{L} = \frac{2k}{CL}(\cos \varphi_L - \cos \varphi_0) - \cos \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (3.124)$$

Kao što je poznato [Timoshenko, Gere 1961], kod vitkih štapova opterećenih uzdužnom tlačnom silom može doći do izvijanja. Kako lisnate opruge, odnosno podatljive elemente mehanizma možemo promatrati kao vitke štapove, potrebno je provjeriti da li se, i u kojoj lisnatoj opruzi javlja uzdužna tlačna sila koja premašuje dopuštene vrijednosti. Izvijanjem jednog podatljivog elementa cijeli mehanizam postaje nestabilan.

Lisnata opruga može se promatrati kao vitka konzolna greda na čijem slobodnom kraju djeluje tlačna sila P_a (P_a je aksijalna komponenta sile P , odnosno komponenta sile P koja djeluje u smjeru osi a).

Aksijalnu komponentu sile P moguće je izračunati prema izrazu (cf. Sliku 3.9)

$$P_a = P \sin \phi = P \sin \left(\alpha - \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (3.125)$$

Kut ϕ definiran je izrazom (3.86).

Da ne bi došlo do izvijanja mora biti zadovoljen uvjet da je sila P_a manja od sile koja izaziva izvijanje lisnate opruge, a koja iznosi [Timoshenko, Gere 1961]

$$P_{\text{krit}} = 2,4674 \frac{EI}{L^2} \quad (3.126)$$

pri čemu za vitku konzolnu gredu sa slobodnim krajem vrijedi $L' = 2L$ [Timoshenko, Gere 1961].

3.5 Proračunski algoritam

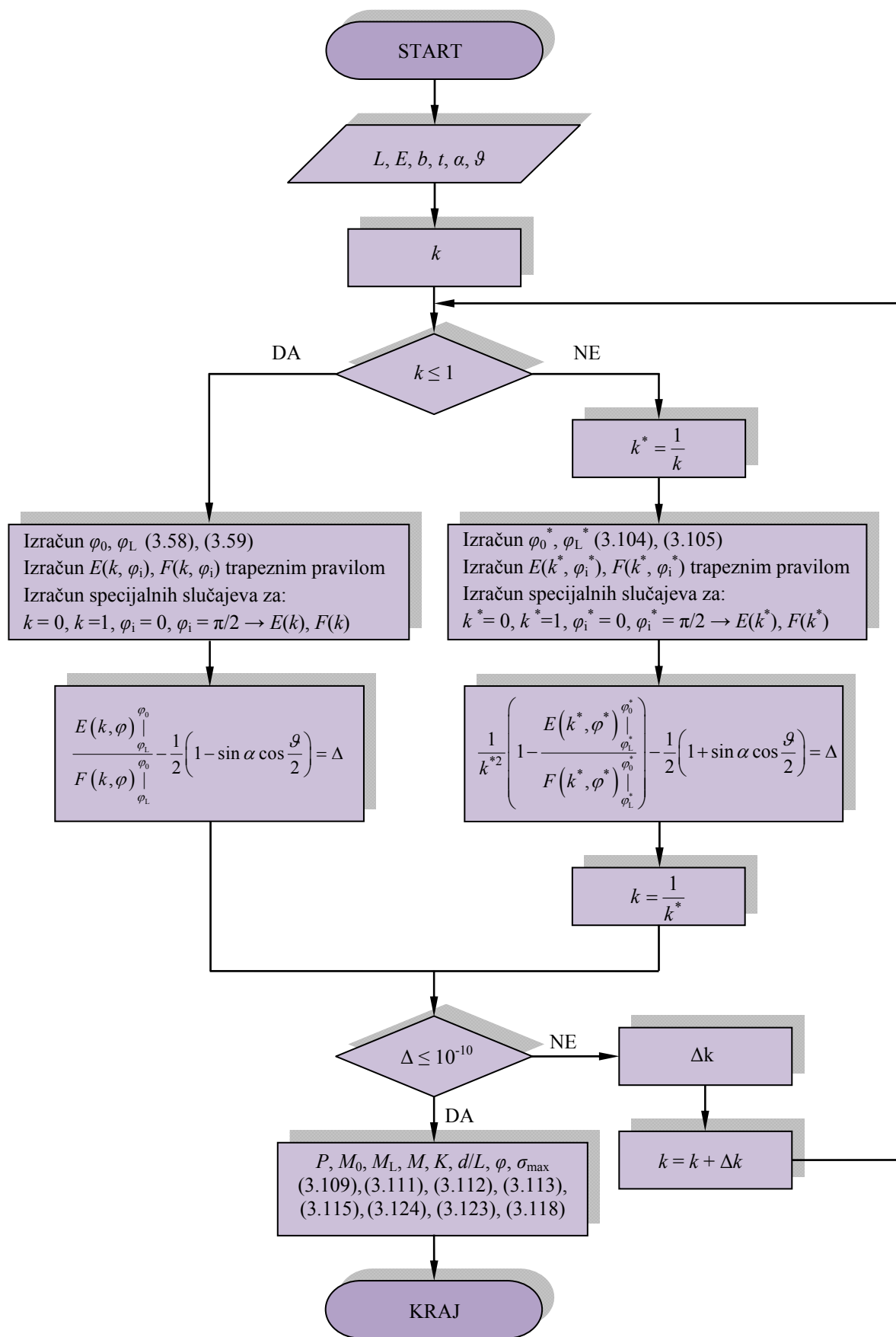
Da bi se olakšao izračun rotacijskog podatljivog mehanizma u programskom paketu MATLAB izrađeno je programsko rješenje nazvano '*Elastica*' u koje je implementirana prethodno definirana matematička formulacija za izračun deformacija (tj. elastične linije opruga), reakcija u osloncima, naprezanja, parazitnih pomaka i stabilnosti rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama [MATLAB, 2010].

Dijagram toka razvijenog programskog rješenja dan je na Slici 3.11.

Kao što je na Slici 3.11 vidljivo, u algoritmu '*Elastica*' pretpostavlja se da je poznata geometrija rotacijskog mehanizma (L, b, t, α), materijal lisnatih opruga (E) i željeni kut rotacije mehanizma (ϑ). Modulu k dodjeljuje se početna vrijednost te, ovisno o vrijednosti k , odabire se grana dijagrama toka.

- Ako je zadovoljen uvjet $|k| \leq 1$:
 - Izračunavaju se granice integracije φ_0 i φ_L prema (3.58) i (3.59).
 - Izračunavaju se eliptični integrali $E(k, \varphi_i)$, $F(k, \varphi_i)$. Za numeričko integriranje nepotpunih eliptičnih integrala prve i druge vrste rabljeno je trapezno pravilo, a da bi se postigla čim veća točnost područje integracije (φ_0, φ_L) podijeljeno je na 10 000 dijelova. Usporedbom s tabličnim rješenjima eliptičnih integrala [Gradshteyn, Ryzhyk, 1980] utvrđeno je da se vrijednosti dobivene numeričkom integracijom poklapaju na cijelom području integracije. Uvedena su pojednostavljenja za specijalne slučajeve kada je $k = 0$, $k = 1$, $\varphi_i = 0$ te $\varphi_i = \pi/2$. U tim se slučajevima potpuni eliptični integrali prve i druge vrste također računaju trapeznim pravilom.
 - Iz (3.97) proizlazi jednadžba kojim je definirana kontrolna vrijednost Δ

$$\Delta = \frac{E(k, \varphi) \Big|_{\varphi_0}^{\varphi_L}}{F(k, \varphi) \Big|_{\varphi_0}^{\varphi_L}} - \frac{1}{2} \left(1 - \sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (3.127)$$



Slika 3.11 Dijagram toka programskog rješenja 'Elastica'

- Ako nije zadovoljen uvjet $|k| \leq 1$:
 - Modul k^* poprima vrijednost prema izrazu (3.102).
 - Izračunavaju se granice integracije φ_0^* i φ_L^* prema (3.104) i (3.105).
 - Izračunavaju se eliptični integrali $E(k^*, \varphi_i^*)$, $F(k^*, \varphi_i^*)$ prethodno opisanim numeričkim integriranjem.
 - Izračunava se kontrolna vrijednosti Δ primjenom izraza (3.108), pa vrijedi

$$\Delta = \frac{1}{k^{*2}} \left(1 - \frac{E(k^*, \varphi^*) \Big|_{\varphi_L^*}^{\varphi_0^*}}{F(k^*, \varphi^*) \Big|_{\varphi_L^*}^{\varphi_0^*}} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (3.128)$$

- Modul k poprima vrijednost prema izrazu (3.102).

Kontrolira se vrijednost Δ i ako nije zadovoljen uvjet $|\Delta| \leq 10^{-10}$, modul k se iterativno povećava pa se s njegovom novom vrijednošću ponovo vraća na početak izračuna. Ako je zadovoljen uvjet $|\Delta| \leq 10^{-10}$, izračunavaju se izlazni podaci za zadnju vrijednost k .

Izlazni podaci su P , M_0 , M_L , M , K , d/L , φ i σ_{\max} i računaju se prema izrazima definiranim jednadžbama (3.109), (3.111), (3.112), (3.113), (3.115), (3.124), (3.123) i (3.118).

U ovom je poglavlju doktorske disertacije razvijena i opisana matematička formulacija simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma opterećenog momentom u području velikih deformacija, odnosno velikih kutova rotacije mehanizma.

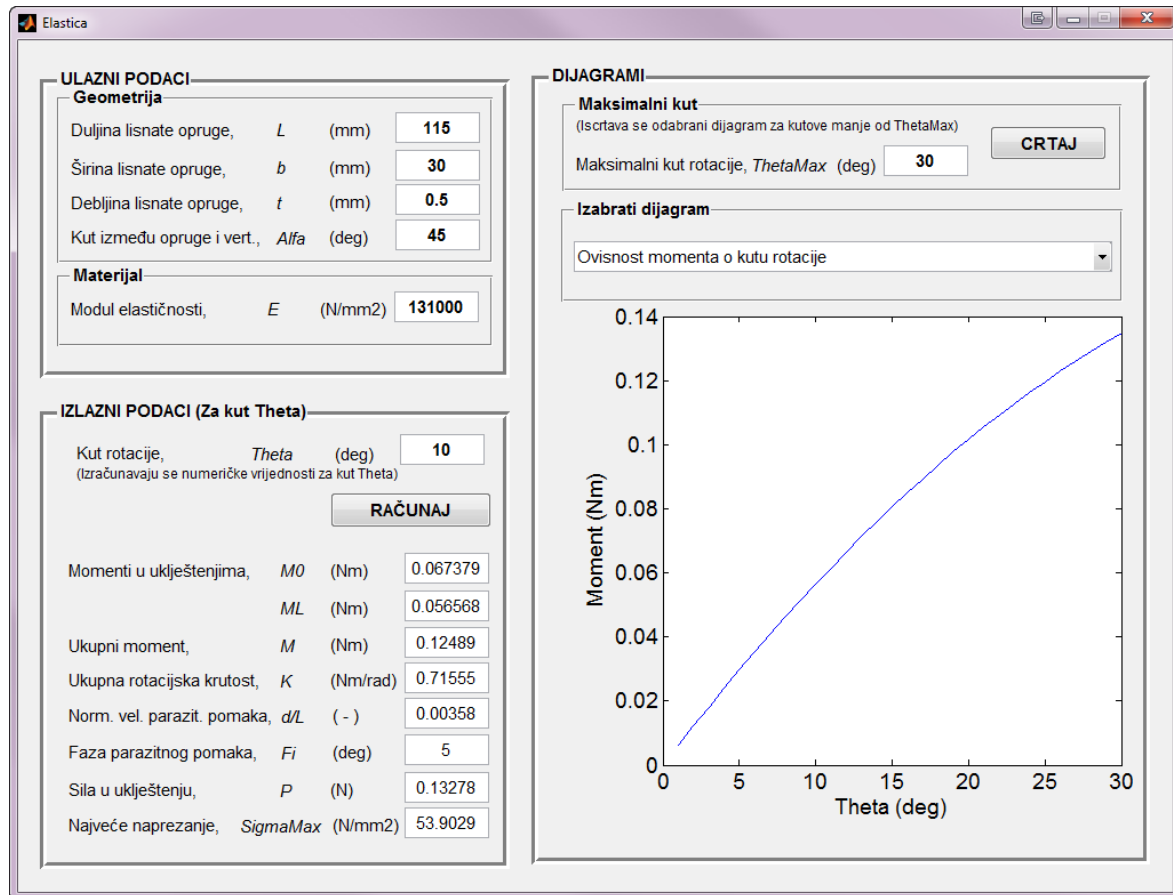
Na Slici 3.12 prikazano je korisničko sučelje za unos podataka u proračun te je dan primjer proračuna, tj. izlaznih podataka iz implementiranog algoritma.

Ulazni podaci u algoritam su (navedeni su, primjera radi, i podaci korišteni u jednom od izračuna):

- duljina lisnate opruge, $L = 115$ mm,
- širina lisnate opruge, $b = 30$ mm,
- debljina lisnate opruge, $t = 0,5$ mm,
- kut lisnatih opruga prema vertikali, $\alpha = 45^\circ$,
- modul elastičnosti materijala lisnatih opruga, $E = 131000$ N/mm² (slitina bakra i berilija),
- kut rotacije mehanizma, $\vartheta = 10^\circ$ – proizvoljni kut za koji programsko rješenje ispisuje

pojedinačne rezultate, neovisno o maksimalnom kutu rotacije,

- maksimalni kut rotacije mehanizma, $\vartheta_{\max} = 30^\circ$ – raspon kutova $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}$.



Slika 3.12 Grafičko korisničko sučelje programskog rješenja 'Elastica'

Rezultati proračuna / izlazni podaci su:

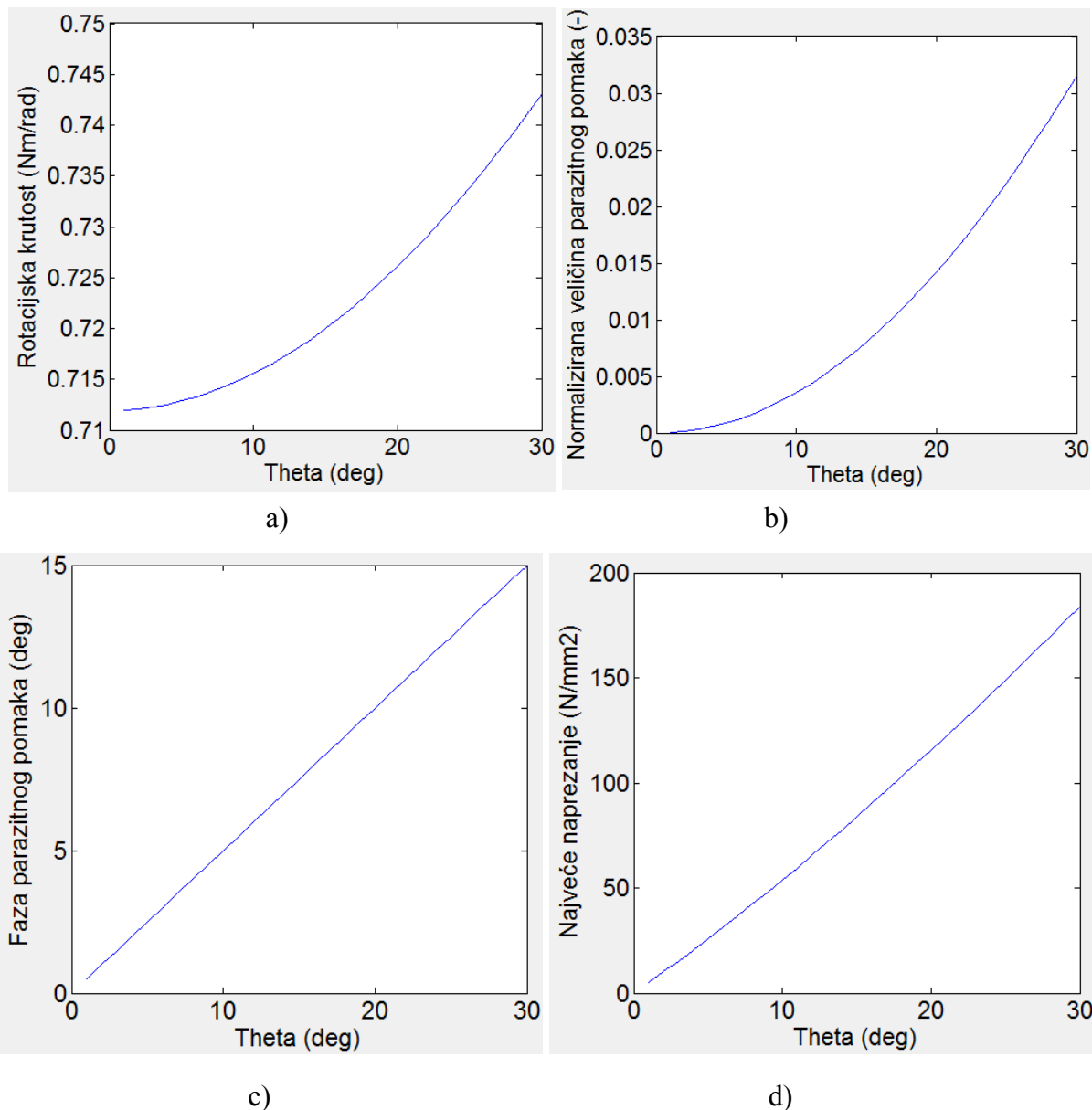
Za definirani kut rotacije mehanizma $\vartheta = 10^\circ$ programsko rješenje pritiskom na dugme RAČUNAJ ispisuje tako sljedeće rezultate (Slika 3.12):

- momenti u uklještenjima, $M_0 = 0,067379$ Nm i $M_L = 0,056568$ Nm,
- moment, $M = 0,12489$ Nm,
- rotacijska krutost, $K = 0,71555$ N/rad,
- normalizirana veličina parazitnog pomaka, $d/L = 0,00358$,
- faza parazitnog pomaka, $\varphi = 5^\circ$,
- sila u uklještenju, $P = 0,13278$ N,
- najveće ekvivalentno naprezanje, $\sigma_{\max} = 53,9029$ N/mm².

Za definirani maksimalni kut rotacije mehanizma (u prikazanom primjeru $\vartheta_{\max} = 30^\circ$) programsko rješenje pritiskom na dugme CRTAJ, za raspon kutova $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}$, može iscrtati

sljedeće dijagrame:

- dijagram ovisnosti momenta o kutu rotacije mehanizma (Slika 3.12),
- dijagram ovisnosti rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma (Slika 3.13a),
- dijagram ovisnosti normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma (Slika 3.13b),
- dijagram ovisnosti faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma (Slika 3.13c),
- dijagram ovisnosti najvećeg napreznja o kutu rotacije mehanizma (Slika 3.13d).



Slika 3.13 Dijagram ovisnosti rotacijske krutosti (a), normalizirane veličine parazitnog pomaka (b), faze parazitnog pomaka (c), i najvećeg napreznja (d) o kutu rotacije mehanizma

Prema Slikama 3.12 i 3.13 se, za dani primjer rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama opterećenog momentom M , uočava se da moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije i najveće naprezanje gotovo linearno rastu s rastom kuta rotacije mehanizma, dok faza parazitnog pomaka raste linearno, a rotacijska krutost mehanizma i normalizirana veličina parazitnog pomaka rastu eksponencijalno s rasom kuta rotacije mehanizma.

U ovom poglavlju je, dakle, dan cjelovit prikaz proračuna ponašanja lisnatih opruga u području velikih (geometrijski nelinearnih) deformacija primjenom *Elastica* metode te rezultirajućeg ponašanja cijelog simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama opterećenog momentom M . Posebno se definiraju veličina i faza parazitnog pomaka mehanizma, reakcije u osloncima, naprezanje i rotacijska krutost mehanizma. Primjenom *Elastica* metode dobiveni su identični rezultati onima iz reference [Haringx, 1949] jer je i u tom radu, kako bi se analitički definiralo ponašanje simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizam opterećenog momentom, rješavana točna diferencijalna jednadžba elastične linije.

Razvojem odgovarajućeg proračunskog algoritma i njegovom implementacijom u programskom paketu MATLAB stvoreni su preduvjeti za potpuno analitičko modeliranje ponašanja simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama opterećenog momentom. To pak pruža mogućnost i za proučavanje utjecaja konstrukcijskih parametara analiziranih mehanizama na njihovu točnost i preciznost te za usporedbu rezultata razvijenog modela s rezultatima drugih (približnih) analitičkih modela u nastavku rada.

4 Približne analitičke metode rješavanja rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama

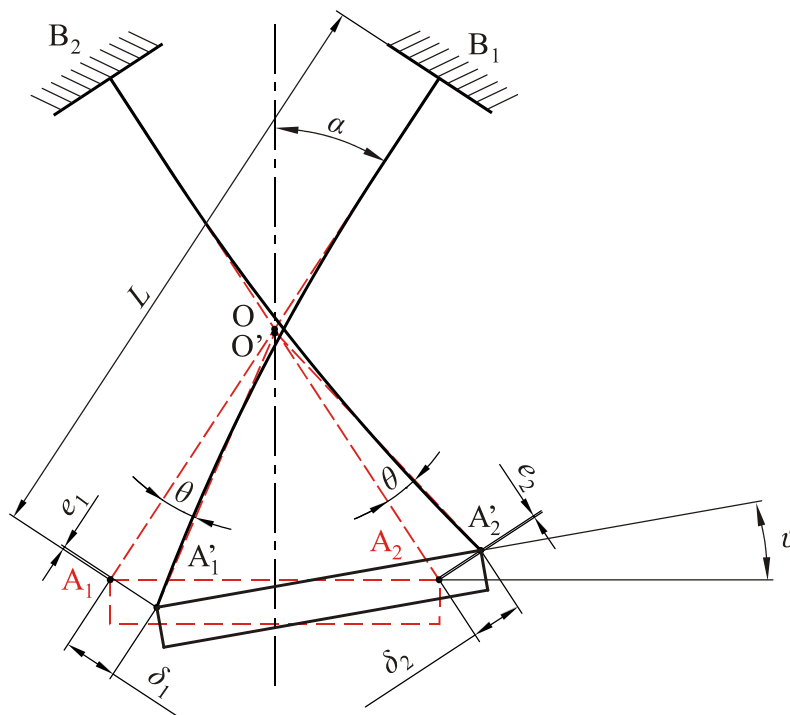
U prethodnim je razmatranjima razvijen analitički model simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma opterećenog momentom u području velikih deformacija, odnosno velikih kutova rotacije. Riješena je točna diferencijalna jednadžba pristupom *Elastica* metode koju su definirali Timoshenko i Gere [Timoshenko, Gere 1961] uz poopćenja koja su uveli De Bona i Zelenika [De Bona, Zelenika, 1997].

U ovoj cjelini detaljnije će se opisati neke analitičke metode proračunavanja karakterističnih parametara rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama predložene u literaturi i okvirno navedene u drugom poglavlju doktorske disertacije. Rezultati dobiveni tim metodama će se zatim usporediti s rezultatima numeričke analize čija će točnost biti utvrđena usporedbom s rezultatima eksperimentalnih mjerenja dostupnima u literaturi. Posebno će se obraditi sljedeće metode:

- Metoda približne zakrivljenosti,
- Metoda pseudo–krutog modela tijela,
- Geometrijska metoda.

4.1 Metoda približne zakrivljenosti

Uslijed djelovanja poprečnih sila i momenta kruto pokretno tijelo A ovješeno na lisnate opruge rotacijskog podatljivog mehanizma zakreće se za kut rotacije ϑ pa se rotacijski mehanizam pojednostavljeno može prikazati kao na Slici 4.1 [Wittrick, 1948].



Slika 4.1 Rotacijski mehanizam zakrenut za mali kut rotacije ϑ (prema [Wittrick, 1948])

Kao i u trećoj cjelini, lisnate se opruge promatraju kao da su uklještene u točkama B_1 i B_2 , dok su točke A_1 i A_2 slobodni krajevi lisnatih opruga u neopterećenom položaju. Iz Slike 4.1 vidljivo je da je kut θ tangente na elastičnu liniju na slobodnom kraju prema položaju neopterećene lisnate opruge mehanizma identičan kutu rotacije mehanizma ϑ [Wittrick, 1948].

Tijelo A i B su kruta tijela ($|\overline{A_1A_2}| = |\overline{A_1'A_2'}|$) pa vrijedi [Wittrick, 1948]

$$\delta_2 - \delta_1 = (e_1 + e_2) \tan \alpha \quad (4.1)$$

a ako je ϑ kut rotacije mehanizma vrijedi i

$$(\delta_1 + \delta_2) = \vartheta L + (e_1 - e_2) \cot \alpha \quad (4.2)$$

U izrazima (4.1) i (4.2) δ_1 i δ_2 su progibi pripadajućih lisnatih opruga uzrokovani savijanjem opruga, dok se njihovo 'skraćenje' (mali progib okomit na δ) označava s e_1 i e_2 .

Rješavanjem sustava jednačbi (4.1) i (4.2) dobivaju se progibi rubnih točaka

$$\delta_1 = \frac{1}{2} gL + e_1 \cot(2\alpha) - e_2 \operatorname{cosec}(2\alpha) \quad (4.3)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} gL + e_1 \operatorname{cosec}(2\alpha) - e_2 \cot(2\alpha) \quad (4.4)$$

U većini slučajeva kut između lisnatih opruga iznosi $2\alpha = 90^\circ$, a vrijednosti e_1 i e_2 su vrlo male u odnosu na vrijednost δ_1 i δ_2 pa se može pisati

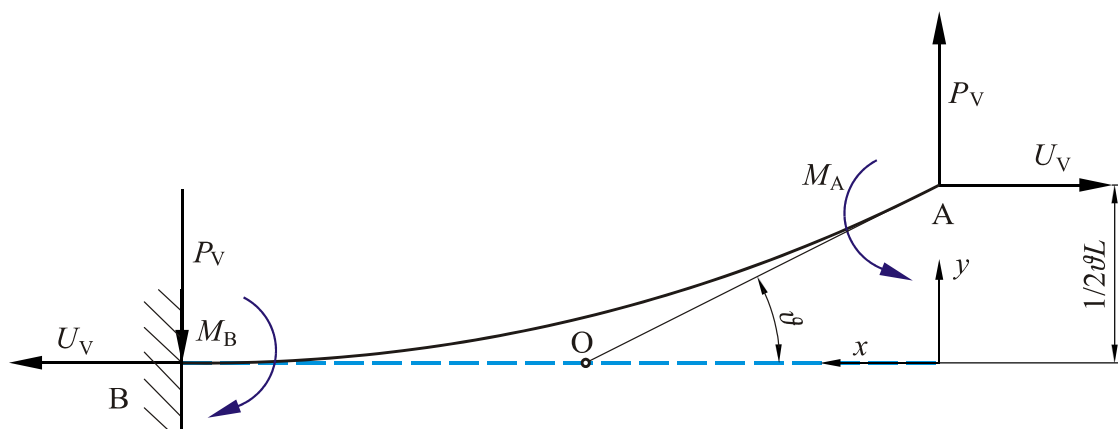
$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2} gL \quad (4.5)$$

Iz izraza (4.5) može se zaključiti da se sjecište tangenti kroz rubne točke lisnatih opruga u deformiranom položaju poklapa sa sjecištem lisnatih opruga u početnom položaju koje, stoga, ima konstantan položaj u odnosu na fiksno tijelo B. U slučaju kada su vrijednosti e_1 i e_2 dovoljno male u odnosu na progibe δ_1 i δ_2 i mogu se zanemariti, sjecište lisnatih opruga pri rotaciji zgloba smatra se, dakle, nepomičnim.

Kako bi se moglo analitički opisati ponašanje rotacijskog podatljivog mehanizma, nužno je prvo još jednom riješiti jednačbe elastičnih linija lisnatih opruga zasebno. Pri tome treba razlikovati slučajeve kada je lisnata opruga opterećena na vlak (Slika 4.2), a kada na tlak (Slika 4.3). U ovom se slučaju u jednačbi elastične linije zanemaruje mala veličina $(dy/dx)^2$ čime se analiza 'linearizira' (koristi se, dakle, upravo 'metoda približne zakrivljenosti') čime se nedvojbeno uvodi i određena pogreška koja će se kvantificirati kasnije u radu.

4.1.1 Jednačba elastične linije lisnate opruge opterećene vlačno

Konzolna greda opterećena je kako je prikazano na Slici 4.2.



Slika 4.2 Lisnata opruga na slobodnom kraju opterećena poprečnom te aksijalnom vlačnom silom i momentom (prema [Wittrick, 1948])

Za proizvoljnu točku duž konzolne grede opterećene poprečnom silom P_v , aksijalnom vlačnom silom U_v i momentom M_A , pritom vodeći računa da na slobodnom kraju vrijedi $\theta = \vartheta$ može se postaviti diferencijalna jednačina elastične linije [Wittrick, 1948]

$$-EI \frac{d^2 x}{dy^2} = U_v \left(\frac{1}{2} \vartheta L - y \right) - P_v x - M_A \quad (4.6)$$

Rješavanjem diferencijalne jednačine (4.6) uz uvođenje supstitucije

$$\beta_v^2 = \frac{U_v L^2}{4EI} \quad (4.7)$$

i rubnih uvjeta za $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\vartheta, \quad y = \frac{1}{2} \vartheta L \quad (4.8)$$

te za $x = L$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (4.9)$$

dobiva se [Wittrick, 1948]

$$M_A = M_B = \frac{EI \vartheta}{L} \beta_v \coth \beta_v \quad (4.10)$$

$$P_v = \frac{1}{2} \vartheta U_v \quad (4.11)$$

Moment savijanja u bilo kojoj točki lisnate opruge je pak [Wittrick, 1948]

$$M = \frac{EI \vartheta}{L} \beta_v \frac{\cosh \beta_v \left(1 - \frac{2x}{L} \right)}{\sinh \beta_v} \quad (4.12)$$

Prema izrazu (4.12), maksimalni se moment savijanja javlja kada je $x = 0$ pa vrijedi

$$M_{\max} = M_A = \frac{EI \vartheta}{L} \beta_v \coth \beta_v \quad (4.13)$$

Sada se može izraziti jednačina sume momenata oko središnje točke O lisnate opruge u kojoj se dvije lisnate opruge rotacijskog podatljivog mehanizma sijeku (cf. Sliku 4.2)

$$M_0 = M_A - \frac{1}{2} \vartheta L U_v + \frac{1}{2} L P_v \quad (4.14)$$

a, uz (4.7), (4.10) i (4.11), izraz (4.14) poprima oblik [Wittrick, 1948]

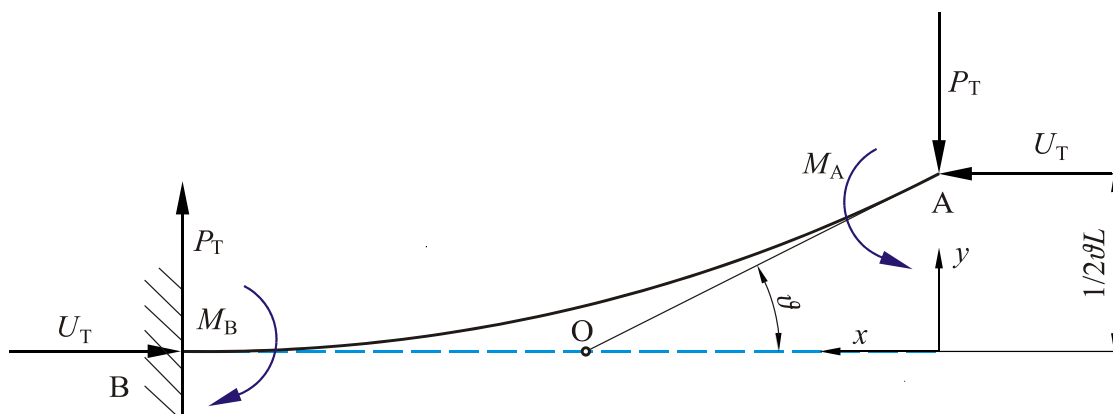
$$M_0 = \frac{EI\vartheta}{L} \xi \quad (4.15)$$

gdje je ξ pomoćni koeficijent za određivanje momenta definiran jednažbom [Wittrick, 1948]

$$\xi = \beta_V (\coth \beta_V - \beta_V) \quad (4.16)$$

4.1.2 Jednažba elastične linije lisnate opruge opterećene tlačno

Konzolna greda opterećena je kako je prikazano na Slici 4.3.



Slika 4.3 Lisnata opruga na slobodnom kraju opterećena poprečnom te aksijalnom tlačnom silom i momentom (prema [Wittrick, 1948])

Za proizvoljnu točku duž konzolne grede opterećene poprečnom silom P_T , aksijalnom tlačnom silom U_T i momentom M_A na slobodnom kraju vrijedi diferencijalna jednažba elastične linije [Wittrick, 1948]

$$-EI \frac{d^2x}{dy^2} = -U_T \left(\frac{1}{2} \beta L - y \right) + P_T x - M_A \quad (4.17)$$

Kako bi se dobili odgovarajući izrazi primjenjuju se, u odnosu na izraze za vlačno opterećenu oprugu, sljedeće supstitucije [Wittrick, 1948]

$$U_T = -U_V \quad (4.18)$$

$$\beta_T = \sqrt{-1} \beta_V \quad (4.19)$$

$$P_T = -P_V \quad (4.20)$$

Dobivaju se tako izrazi koji se primjenjuju za lisnate opruge opterećene tlačno [Wittrick, 1948]

$$\beta_T^2 = \frac{U_T L^2}{4EI} \quad (4.21)$$

$$M_A = M_B = \frac{EI\vartheta}{L} \beta_T \cot \beta_T \quad (4.22)$$

$$P_T = \frac{1}{2} \vartheta U_T \quad (4.23)$$

$$M = \frac{EI\vartheta}{L} \beta_T \frac{\cos \beta_T \left(1 - \frac{2x}{L}\right)}{\sin \beta_T} \quad (4.24)$$

Prema (4.24) maksimalni moment savijanja u lisnatoj opruzi javlja se kada vrijedi $x = L/2$ pa se dobiva

$$M_{\max} = \frac{EI\vartheta}{L} \beta_T \operatorname{cosec} \beta_T = M_A \sec \beta_T \quad (4.25)$$

Iz izraza (4.25) proizlazi da ako vrijednost $\beta_T \rightarrow \pi$ moment $M \rightarrow \infty$, odnosno dolazi do izvijanja lisnate opruge.

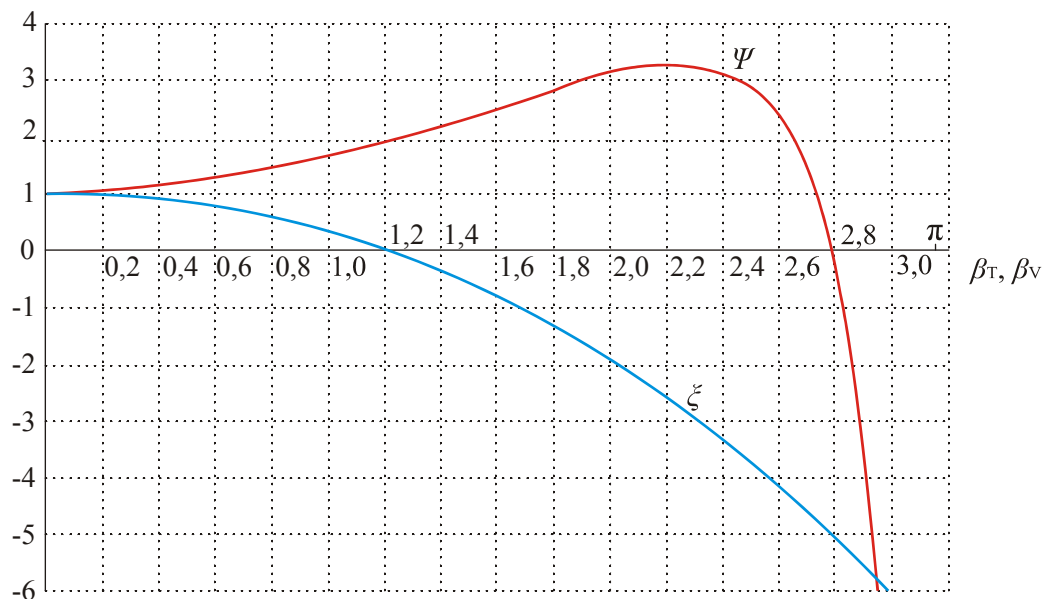
Moment M_0 oko središnje točke lisnate opruge je u ovom slučaju [Wittrick, 1948]

$$M_0 = \frac{EI\vartheta}{L} \psi \quad (4.26)$$

gdje je ψ pomoćni koeficijent za određivanje momenta savijanja definiran jednačbom [Wittrick, 1948]

$$\psi = \beta_T (\cot \beta_T + \beta_T) \quad (4.27)$$

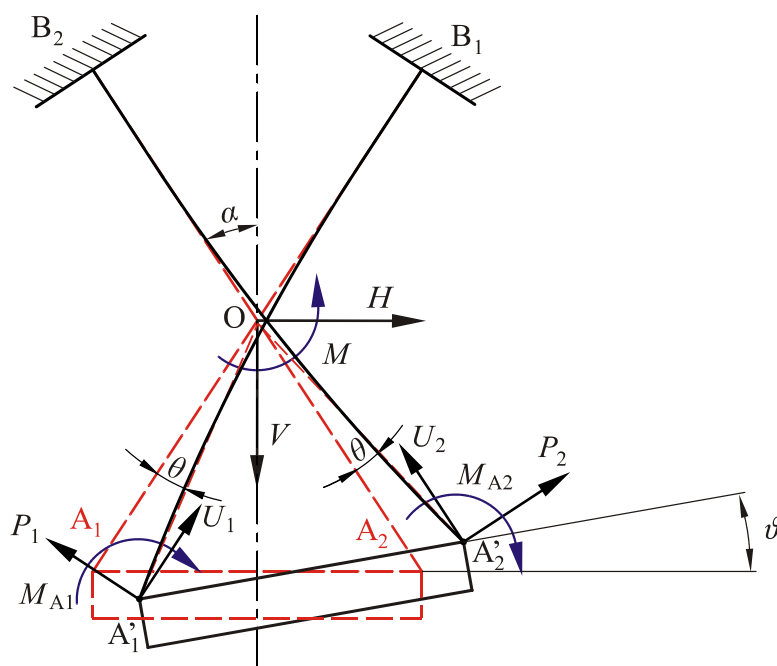
Na Slici 4.4 dan je grafički prikaz ovisnosti pomoćnih koeficijenata ζ i ψ za izračun momenata savijanja u lisnatim oprugama, definiranih izrazima (4.16) i (4.27) o koeficijentima β_T i β_V [Wittrick, 1948].



Slika 4.4 Ovisnost pomoćnih koeficijenata ξ i ψ o promjeni koeficijenata β_T i β_V (prema [Wittrick, 1948])

4.1.3 Sile u lisnatim oprugama i rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma

Nakon definiranja izraza koji vrijede za pojedinu lisnatu oprugu, potrebno je promatrati podatljivi zglob kao cjelinu. Zglob je, kako je prikazano na Slici 4.5, opterećen u točki O, vertikalnom silom V , horizontalnom silom H i momentom M .



Slika 4.5 Opterećenje rotacijskog podatljivog mehanizma (prema [Wittrick, 1948])

Jednadžbe ravnoteže sila za mehanizam su [Wittrick, 1948]

$$V = (U_1 + U_2) \cos \alpha + (P_1 - P_2) \sin \alpha \quad (4.28)$$

$$H = (P_1 + P_2) \cos \alpha - (U_1 - U_2) \sin \alpha \quad (4.29)$$

Bez obzira da li u lisnatim oprugama djeluje vlačna ili tlačna sila, vrijedi odnos dobiven iz (4.11) i (4.23)

$$P = \frac{1}{2} gU \quad (4.30)$$

Uvrštavanjem (4.30) u (4.28) i (4.29) te rješavanjem jednadžbi po U_1 i U_2 dobiva se [Wittrick, 1948]

$$U_1 = \frac{2}{g} P_1 = \frac{V(2 \tan \alpha + g) - H(2 - g \tan \alpha)}{(4 + g^2) \sin \alpha} \quad (4.31)$$

$$U_2 = \frac{2}{g} P_2 = \frac{V(2 \tan \alpha - g) - H(2 + g \tan \alpha)}{(4 + g^2) \sin \alpha} \quad (4.32)$$

Često je kut rotacije mehanizma g dovoljno mali da se u izrazima (4.31) i (4.32) može zanemariti pa se iz gornjih izraza dobiva [Wittrick, 1948]

$$U_1 = \frac{2}{g} P_1 = \frac{1}{2} (V \sec \alpha - H \operatorname{cosec} \alpha) \quad (4.33)$$

$$U_2 = \frac{2}{g} P_2 = \frac{1}{2} (V \sec \alpha + H \operatorname{cosec} \alpha) \quad (4.34)$$

Iz izraza (4.33) i (4.34) vidljivo je da su, ako je $|H| < |V| \tan \alpha$, obje lisnate opruge opterećene vlačno ili da su obje opterećene tlačno, što ovisi o smjeru djelovanja sile V . Ako vrijedi $|H| > |V| \tan \alpha$, jedna je lisnata opruga opterećena tlačno, a druga vlačno.

Iz Slike 4.5 proizlazi jednadžba ravnoteže momenata oko točke O i definira se sumom momenata oko točke O za svaku lisnatu oprugu zasebno [Wittrick, 1948]

$$M = M_{01} + M_{02} \quad (4.35)$$

gdje je M_0 definiran izrazom (4.15) ako je lisnata opruga opterećena vlačno, odnosno izrazom (4.26) ako je opruga opterećena tlačno, pa se dobiva [Wittrick, 1948]

$$\frac{ML}{EIg} = (\xi_1 \text{ ili } \psi_1) + (\xi_2 \text{ ili } \psi_2) \quad (4.36)$$

Iz izraza (4.31) i (4.32) zaključuje se da vrijednosti sila U_1 i U_2 ipak ovise o kutu rotacije ϑ , što znači da o kutu rotacije ovise i β_V i β_T . Stoga, ako se vrijednost kuta rotacije ϑ ne može zanemariti, moment M potreban za dobivanje određenog kuta rotacije nije linearno ovisan o tom kutu. Ako se očekuju mali kutovi rotacije rotacijskog mehanizma, zanemarivanjem provedenim u izrazima (4.33) i (4.34) čini se mala pogreška.

Rotacijska krutost mehanizma K može se definirati izrazom [Wittrick, 1948]

$$K = \frac{EI}{L} [(\xi_1 \text{ ili } \psi_1) + (\xi_2 \text{ ili } \psi_2)] \quad (4.37)$$

a bezdimenzijska rotacijska krutost izrazom

$$\frac{KL}{EI} = (\xi_1 \text{ ili } \psi_1) + (\xi_2 \text{ ili } \psi_2) \quad (4.38)$$

Ako je rotacijski podatljivi mehanizam opterećen momentom, odnosno ako vrijedi $V = H = 0$, moment potreban za dobivanje kuta rotacije ϑ definiran je izrazom [Wittrick, 1948]

$$M = \frac{2EI\vartheta}{L} \quad (4.39)$$

A bezdimenzijska rotacijska krutost mehanizma tada poprima vrijednost

$$\frac{KL}{EI} = 2 \quad (4.40)$$

Ako kut lisnatih opruga prema vertikali iznosi $\alpha = 45^\circ$, izrazi (4.33) i (4.34), nakon normalizacije (množenja s $L^2/(EI)$ da bi se dobile bezdimenzijske veličine), poprimaju oblik

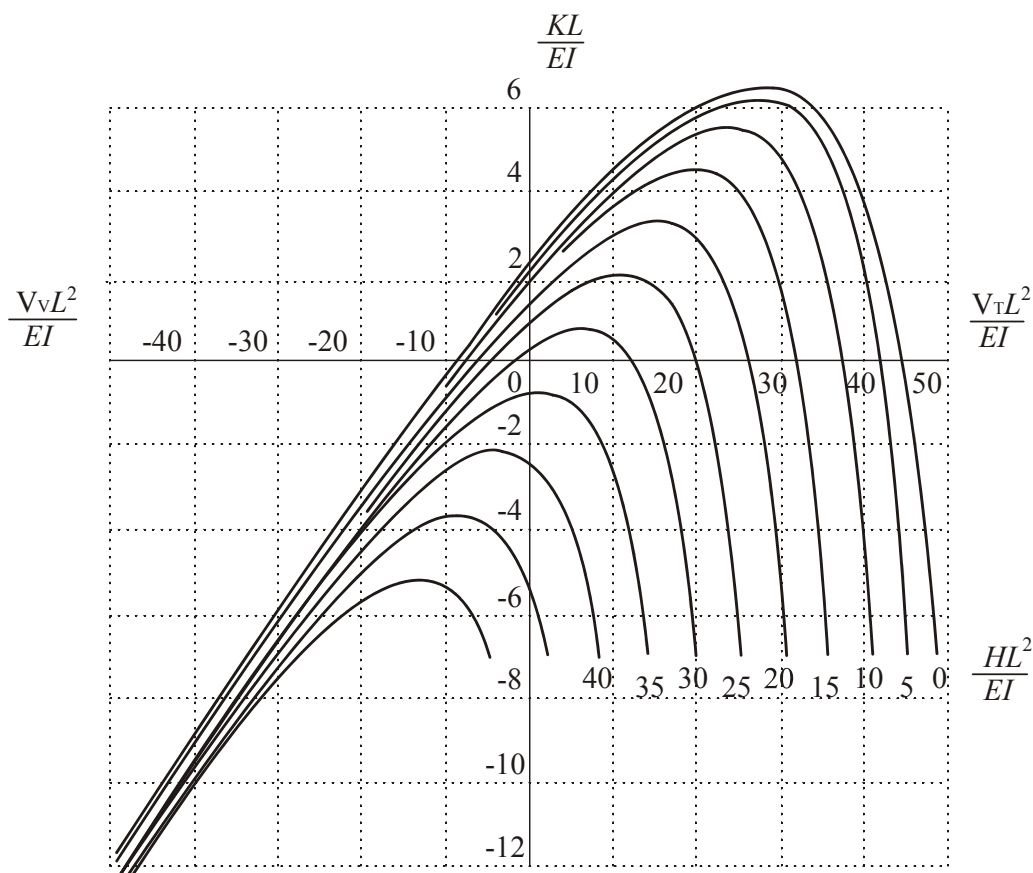
$$\frac{U_1 L^2}{EI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{VL^2}{EI} - \frac{HL^2}{EI} \right) \quad (4.41)$$

$$\frac{U_2 L^2}{EI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{VL^2}{EI} + \frac{HL^2}{EI} \right) \quad (4.42)$$

Naravno, djelovanje vanjskih sila uvelike utječe na stabilnost rotacijskog podatljivog mehanizma. Potrebno je stoga izvršiti i provjeru da li je u jednoj od lisnatih opruga došlo do pojave negativnog momenta, odnosno negativne rotacijske krutosti koja dovodi do nestabilnosti.

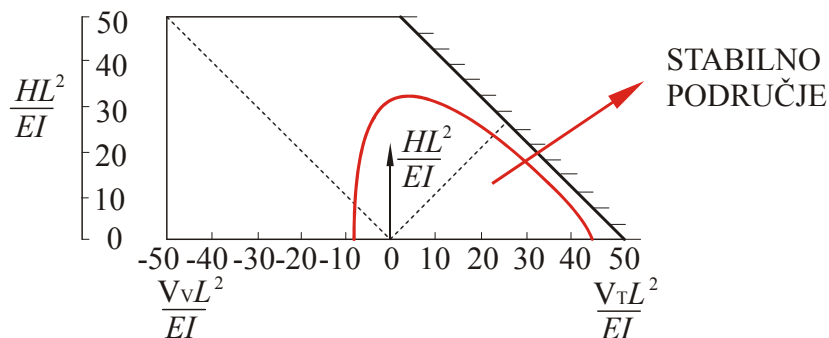
Primjenom izraza (4.37), (4.41), (4.42), (4.7) i (4.21) dobiven je dijagram prikazan na Slici 4.6, pomoću kojeg se, za određenu kombinaciju opterećenja $HL^2/(EI)$ i $VL^2/(EI)$, određuje

bezdimenzijska rotacijska krutost mehanizma $KL/(EI)$, [Wittrick, 1948].



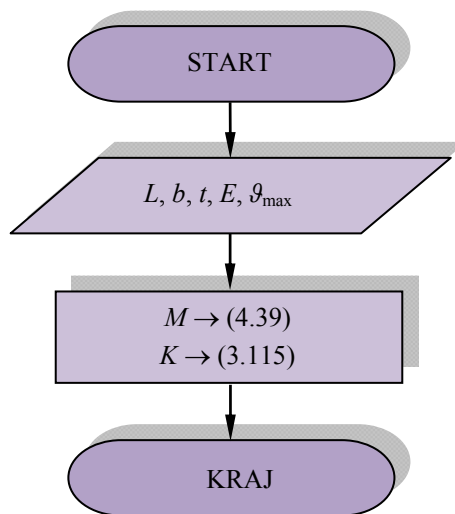
Slika 4.6 Dijagram rotacijske krutosti, odnosno stabilnosti rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama (prema [Wittrick, 1948])

Iz dijagrama se uočava veliki utjecaj sila na rotacijsku krutost i stabilnost rotacijskih podatljivih mehanizama. Na Slici 4.7 prikazano je područje stabilnosti rotacijskog podatljivog mehanizma koje je ograničeno krivuljom označenom crvenom bojom, koja označava kombinaciju $HL^2/(EI)$ i $VL^2/(EI)$ kod koje vrijedi da je rotacijska krutost $K = 0$ [Wittrick, 1948].



Slika 4.7 Stabilno područje rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama (prema [Wittrick, 1948])

U programskom paketu MATLAB implementiran je analitički izračun rotacijskog podatljivog mehanizama, opterećenog samo momentom ($V = H = 0$), metodom približne zakrivljenosti, čiji je dijagram toka dan na Slici 4.8.



Slika 4.8 Dijagram toka programskog rješenja metodom približne zakrivljenosti

Tijek proračuna je, dakle:

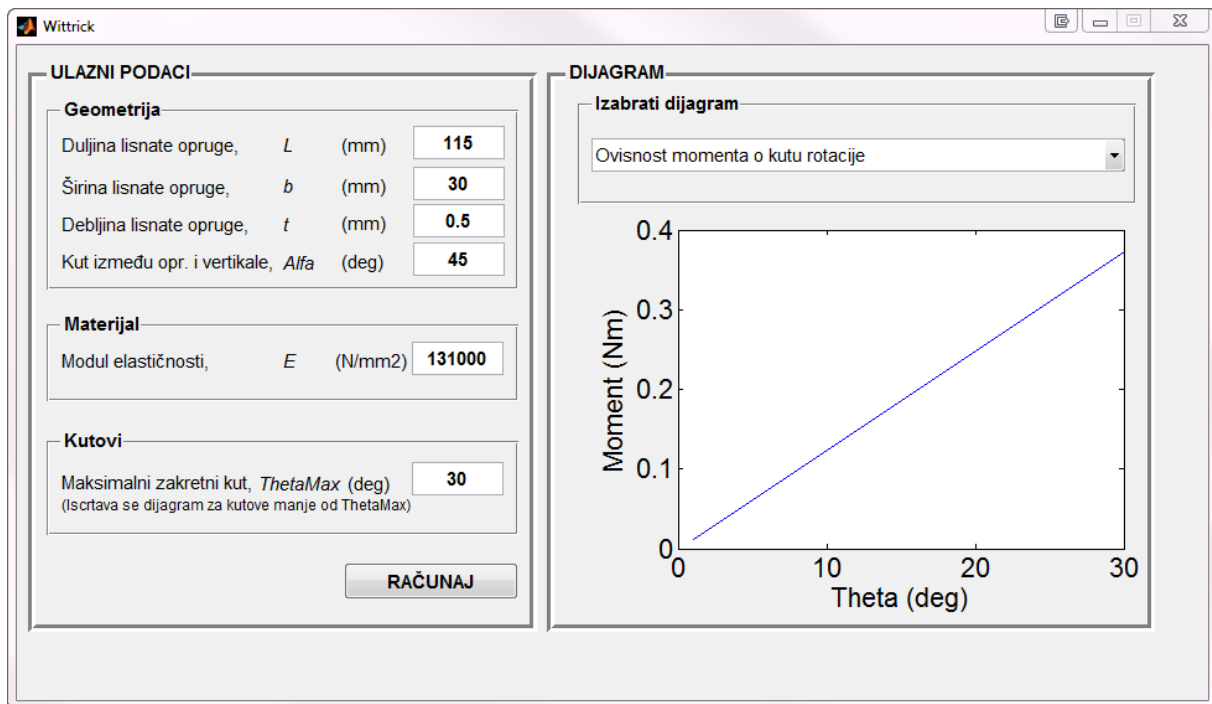
- Poznata je geometrija rotacijskog mehanizma (L, b, t, a), materijal lisnatih opruga (E) te željeni maksimalni kut rotacije mehanizma (ϑ_{\max}).
- Primjenom izraza (4.39) izračunava se moment M , a primjenom izraza (3.115) izračunava se zatim rotacijska krutost mehanizma K .

Na Slici 4.9 je za taj algoritam prikazano odgovarajuće korisničko sučelje na kojemu je kao primjer prikazan proračun s istim ulaznim podacima kao i u cjelini 3.5 za primjer proračuna *Elastica* metodom.

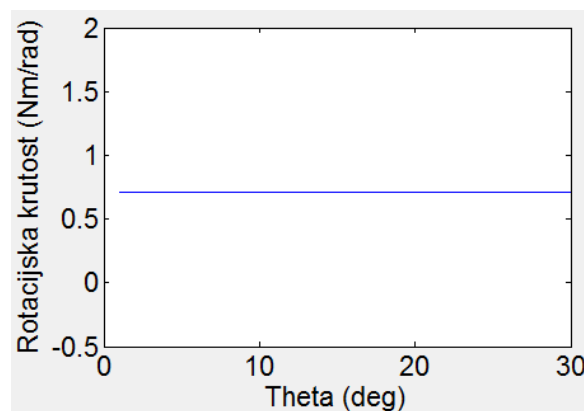
Rezultati proračuna / izlazni podaci iz programa su:

Za definirani maksimalni kut rotacije mehanizma $\vartheta_{\max} = 30^\circ$ programsko rješenje pritiskom na dugme RAČUNAJ, za raspon kutova $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}$, crta sljedeće dijagrame:

- dijagram ovisnosti momenta o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.9a) te
- dijagram ovisnosti rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.9b).



a)



b)

Slika 4.9 Grafičko korisničko sučelje programskog rješenja dobivenog primjenom metode približne zakrivljenosti (a) i dijagram ovisnosti rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma ϑ (b)

Na Slici 4.9a vidljivo je da moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije ϑ linearno raste s rastom tog kuta, a na Slici 4.9b da je rotacijska krutost konstantna i u zadanom primjeru iznosi $K = 0,721$ Nm/rad.

4.2 Metode pseudo–krutog modela tijela

Kako bi se podatljivi mehanizam mogao analizirati i konstruirati metodama razvijenim za tradicionalne mehanizme, a kako je već okvirno navedeno u drugom poglavlju disertacije, cilj

metode pseudo–krutog modela tijela je modelirati podatljivi mehanizam kao ekvivalentni mehanizam koji se sastoji od krutih elemenata povezanih zglobovima [Howell, 2013]. Pristupom metode pseudo–krutog modela tijela za svaki se podatljivi element predviđa progib krajnje točke elementa i karakteristika ovisnosti opterećenja o progibu, a samo se gibanje modelira upravo uz pomoć ekvivalentnih krutih tijela povezanih zglobovima (svornjacima). Kako bi se čim vjernije aproksimirala karakteristika ovisnosti opterećenja o progibu podatljivog elementa, u zglobovima se smještaju spiralne fleksijske opruge pri čemu je od velike važnosti određivanje položaja zglobova i krutosti opruga koje se u njima nalaze. U tu su svrhu, na osnovu velikog broja analiza provedenih metodom konačnih elemenata, dobiveni izrazi kojima se definira položaj zgloba i krutost opruga za kratke podatljive elemente, duge podatljive elemente, rotacijske podatljive mehanizme s lisnatim oprugama i druge konfiguracije podatljivih elemenata i mehanizama [Howell, 2001], [Jensen, Howell, 2002].

Iako metoda pseudo–krutog modela tijela omogućava relativno jednostavnu analizu sustava kod kojih je ovisnost opterećenja i progiba nelinearna, važno je napomenuti da je i ova metoda približna pa se u literaturi navodi da ona nije pogodna za preciznije proračune, primjerice, parazitnog pomaka podatljivog mehanizma. Ova metoda pak konstruktoru omogućava brzi razvoj osnovnog koncepta podatljivog mehanizma. Dobiveni model konstrukcijskog rješenja može se, ako je to potrebno, korištenjem nelinearne analize metodom konačnih elemenata dodatno poboljšati.

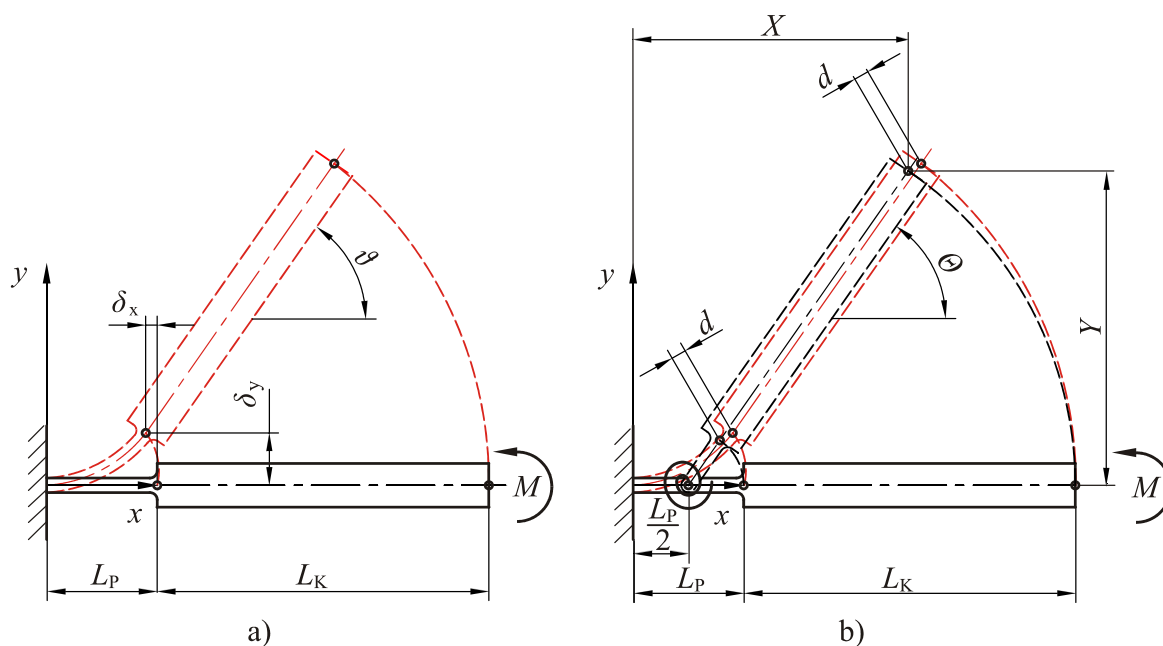
4.2.1 Modeliranje rotacijskog podatljivog mehanizma modelom zgloba sa svornjakom

Da bi se objasnio bit metode pseudo–krutog modela tijela, krenut će se od najjednostavnijeg primjera rotacijskog podatljivog zgloba dobivenog uz pomoć mehanizma koji se sastoji od kratkog podatljivog elementa duljine L_P spojenog s krutim tijelom duljine L_K (Slika 4.10a), kada vrijede sljedeći izrazi

$$L_K \gg L_P \quad (4.43)$$

$$(EI)_{L_K} \gg (EI)_{L_P} \quad (4.44)$$

Kratki zglob je na slobodnom kraju opterećen momentom M koji uzrokuje rotaciju krutog tijela za kut rotacije ϑ .



Slika 4.10 Pseudo–kruti model zgloba sa svornjakom (prema [Howell, 2001])

Za kratki podatljivi zglob opterećen momentom vrijedi izraz [Howell, 2001], [Jensen, Howell, 2002]

$$\frac{d\mathcal{G}}{ds} = \frac{M}{EI} \quad (4.45)$$

Separacijom varijabli u (4.45) dobiva se

$$\int_0^{\mathcal{G}} d\mathcal{G} = \int_0^{L_P} \frac{M}{EI} ds \quad (4.46)$$

Integracijom izraza (4.46) bez uvođenja pojednostavljenja kojima se pretpostavlja da su progibi mali, dobiva se

$$\mathcal{G} = \frac{ML_P}{EI} \quad (4.47)$$

Uvrštavanjem u izraz (4.45) jednakosti \$ds = \sin\theta dy\$ moguće je dobiti izraz za izračun pomaka \$\delta_y\$ krajnje točke zgloba u smjeru osi \$y\$, dobiva se

$$\int_0^{\delta_y} dy = \frac{M}{EI} \int_0^{\mathcal{G}} \sin\theta d\mathcal{G} \quad (4.48)$$

odnosno, sređivanjem [Jensen, Howell, 2002]

$$\frac{\delta_y}{L_P} = \frac{1 - \cos\theta}{\theta} \quad (4.49)$$

Analogno se, uvrštavanjem u (4.45) izraza $ds = \cos\vartheta dx$, dobiva pomak δ_x krajnje točke zgloba u smjeru osi x [Jensen, Howell, 2002]

$$\int_0^{\vartheta} dx = \frac{M}{EI} \int_0^{\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta \quad (4.50)$$

$$\frac{\delta_x}{L_p} = \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \quad (4.51)$$

Na osnovu izraza (4.47), (4.49) i (4.51) razvijen je pseudo–kruti model ekvivalentan mehanizmu na Slici 4.10a, na način da je kratki podatljivi zglob zamijenjen krutim tijelom sa zglobom na udaljenosti $L_p/2$ od ishodišta koordinatnog sustava (Slika 4.10b). Budući da je kratki zglob znatno kraći (pretpostavka je da je to najmanje 10 puta) od krute gredice, progib kratkog zgloba je vrlo mali u odnosu na duljinu krute gredice, te neće doći do znatnih odstupanja ako se zglob postavi u neki drugi položaj [Jensen, Howell, 2002]. Kut rotacije Θ pseudo–krutog modela jednak je stoga kutu rotacije podatljivog mehanizma (Slika 4.10) pa vrijedi

$$\Theta = \vartheta \quad (4.52)$$

To znači da će, kao što je vidljivo i na Slici 4.10b, uslijed djelovanja momenta stvarna i modelirana gređica, jer vrijedi (4.43), doći u paralelan položaj [Howell, 2001], [Jensen, Howell, 2002].

Koordinate X i Y rubne točke modelirane gređice su prema Slici 4.10b u bezdimenzijskom obliku definirane izrazima [Howell, 2001], [Jensen, Howell, 2002]

$$\frac{X}{L_p} = \frac{1}{2} + \left(\frac{L_K}{L_p} + \frac{1}{2} \right) \cos \vartheta \quad (4.53)$$

$$\frac{Y}{L_p} = \left(\frac{L_K}{L_p} + \frac{1}{2} \right) \sin \vartheta \quad (4.54)$$

Otpor analizirane strukture na savijanje modeliran je spiralnom fleksijskom oprugom krutosti K [Howell, 2001], [Jensen, Howell, 2002]

$$K = \frac{(EI)_{L_p}}{L_p} \quad (4.55)$$

Kao posljedica paralelnosti gređica javlja se razlika između putanja rubnih točaka stvarne i modelirane gređice, a najveće se odstupanje d javlja u krajnjem položaju. Vidljivo je da je ukupno odstupanje, također zbog paralelnosti, identično na kraju kratkog zgloba i na kraju

krute gredice modela. Stoga se odstupanje modela od ponašanja originalnog mehanizma u smjerovima osi x i y može izračunati uvrštavanjem $L_K = 0$ u izraze (4.53) i (4.54) te potom oduzimanjem dobivenih vrijednosti od pomaka krajnje točke kratkog elementa definiranog izrazima (4.49) i (4.51). Odstupanja u smjerovima osi x i y označavaju se s ε_x i ε_y te se izračunavaju pomoću jednadžbi [Howell, 2001], [Jensen, Howell, 2002]

$$\frac{\varepsilon_x}{L_p} = \left| \frac{\delta_x}{L_p} - \left(1 - \frac{X}{L_p} \right) \right| = \left| \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} - \frac{1}{2}(1 + \cos \vartheta) \right| \quad (4.56)$$

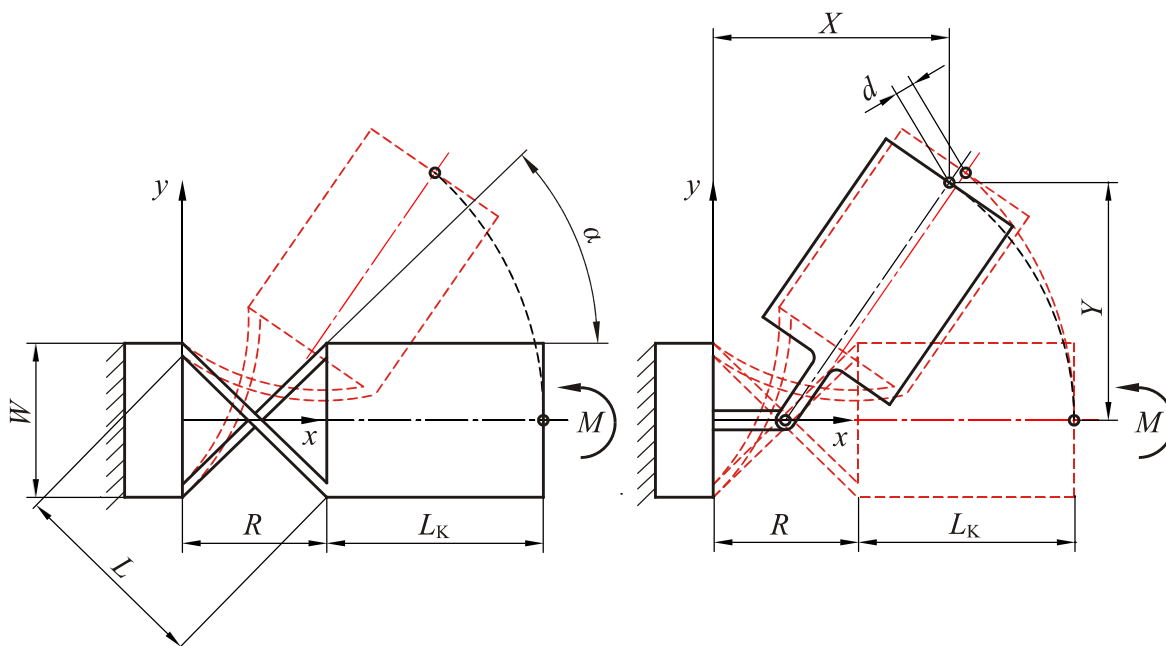
$$\frac{\varepsilon_y}{L_p} = \left| \frac{\delta_y}{L_p} - \frac{Y}{L_p} \right| = \left| \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta} - \frac{1}{2} \sin \vartheta \right| \quad (4.57)$$

Ukupno odstupanje putanje krajnje točke gredice dano je onda izrazom

$$\frac{d}{L_p} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x}{L_p} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_y}{L_p} \right)^2} \quad (4.58)$$

Pokazuje se da za kutove rotacije $\vartheta = 63^\circ$ (1,1 rad) odstupanje d koje se javlja kod primjene metode pseudo–krutog tijela na kratke podatljive zglobove iznosi oko $0,1L_p$ [Howell, 2001].

Iz modeliranja kratkog podatljivog zgloba modelom zgloba sa svornjakom primjenom metode pseudo–krutog modela tijela, proizašao je, kao što je prikazano na Slici 4.11, najjednostavniji način modeliranja gibanja rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama.



Slika 4.11 Modeliranje rotacijskog podatljivog zgloba s lisnatim oprugama kao pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom (prema [Jensen, Howell, 2002])

Rotacijski podatljivi mehanizam se u tom slučaju također zamjenjuje zglobom sa svornjakom u kojem je smještena opruga [Jensen, Howell, 2002].

Efektivna duljina podatljivog zgloba R definirana se izrazom

$$R = nW \quad (4.59)$$

gdje je W širina podatljivog zgloba, a n bezdimenzijska značajka koja opisuje relativnu geometriju zgloba. Duljina lisnate opruge rotacijskog mehanizma je [Jensen, Howell, 2002]

$$L = W\sqrt{1+n^2} \quad (4.60)$$

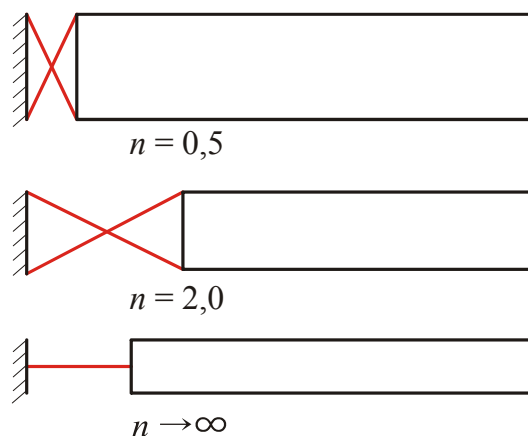
pa je omjer duljine lisnate opruge i efektivne duljine zgloba

$$\frac{L}{R} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \quad (4.61)$$

Bezdimenzijska se značajka n može izraziti ovisno o kutu lisnate opruge prema osi x pa vrijedi

$$n = \cot \alpha \quad (4.62)$$

Iz izraza (4.61) vidljivo je da se s porastom vrijednosti bezdimenzijske značajke n omjer L/R približava jedinici. Na Slici 4.12 prikazana je promjena geometrije rotacijskog podatljivog mehanizma ovisna o promjeni bezdimenzijske značajke n , čijim se rastom rotacijski podatljivi mehanizam počinje ponašati kao kratki podatljivi zglob [Jensen, Howell, 2002].



Slika 4.12 Promjena geometrije rotacijskog podatljivog mehanizma ovisna o promjeni bezdimenzijske značajke n (prema [Jensen, Howell, 2002])

Kako je gibanje rotacijskog podatljivog mehanizma složeno, odstupanje rubne točke d nije dobiveno analitički već analizom metodom konačnih elemenata [Jensen, Howell, 2002]. S

time je ciljem provedena analiza brojnih modela različitih geometrija i dobivene vrijednosti odstupanja uspoređene su s rezultatima metode pseudo–krutog modela tijela. Modeli su potom optimizirani kako bi se smanjilo odstupanje za veliki kut rotacije mehanizma od 63° (1,1 rad). S porastom n -a bezdimenzijsko odstupanje d/R za $\vartheta = 63^\circ$ iznosi cca. 10%, što je relativno veliko odstupanje, iako treba imati u vidu da relativno odstupanje osjetno opada sa smanjenjem kuta ϑ pa, primjerice, odstupanje pri kutu $\vartheta = 30^\circ$ iznosi cca. 2,2% [Jensen, Howell, 2002].

Analizom metodom konačnih elemenata utvrđena je gotovo linearna ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije o tom kutu pa se aproksimirana rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma može definirati izrazom [Jensen, Howell, 2002]

$$K = \frac{K_\Theta EI}{2L} \quad (4.63)$$

gdje je K_Θ koeficijent krutosti.

Koeficijent krutosti dobiven je kao rezultat analize metodom konačnih elemenata kojom je, za kut rotacije $\vartheta = 63^\circ$, minimizirano odstupanje rotacijske krutosti, a ovisan je o geometriji rotacijskog podatljivog mehanizma. U referenci [Jensen, Howell, 2002] optimiziranjem je dobiven polinomni izraz za izračun koeficijenta krutosti K_Θ u ovisnosti o bezdimenzijskoj značajki n

$$K_\Theta = 5,300185 - 1,6866n + 0,88535n^2 - 0,2094n^3 + 0,018385n^4 \quad (4.64)$$

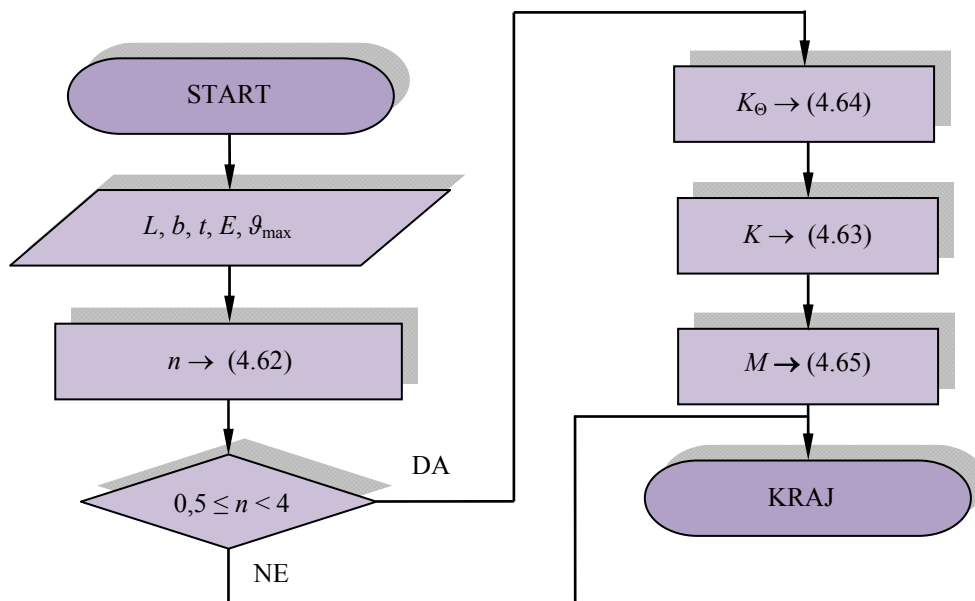
za $0,5 \leq n \leq 4,0$

Kada se odredi rotacijska krutost, moment M potreban za dobivanje određenog kuta rotacije ϑ može se izračunati prema izrazu

$$M = K \vartheta \quad (4.65)$$

Kao što je vidljivo na Slici 4.11, primjenom modela zgloba sa svornjakom, položaj svornjaka prilikom zakretanja ostaje nepromijenjen, pa parazitni pomak modela iznosi 0.

U programskom paketu MATLAB implementiran je analitički izračun rotacijskog podatljivog mehanizama modeliranog pomoću metode pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom čiji je dijagram toka dan na Slici 4.13.

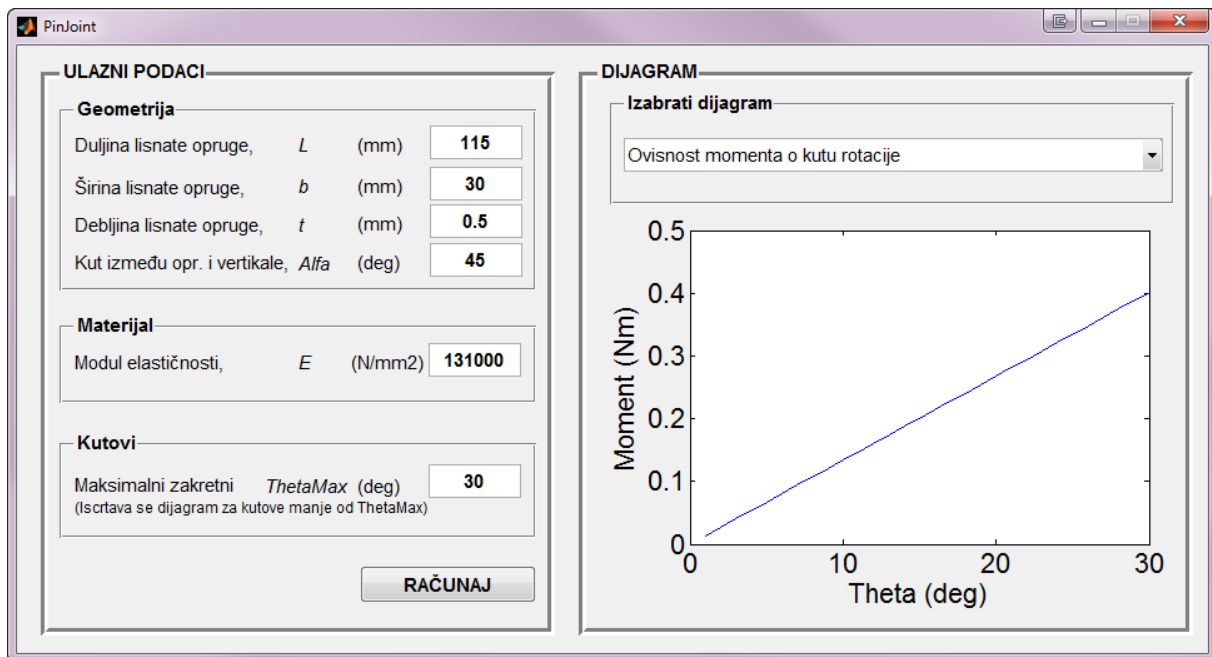


Slika 4.13 Dijagram toka programskog rješenja pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom

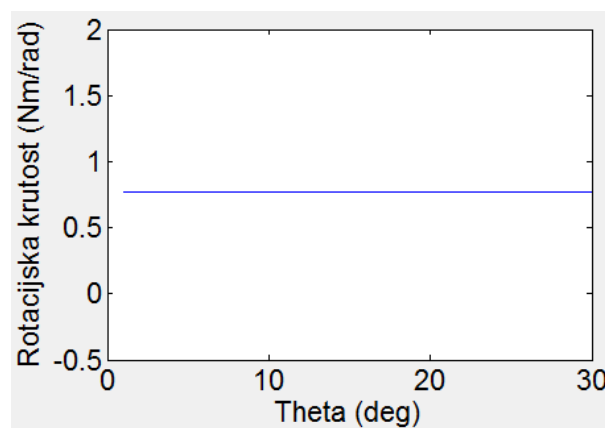
Tijek proračuna je, dakle:

- Poznata je geometrija rotacijskog mehanizma (L, b, t, α), materijal lisnatih opruga (E) i željeni maksimalni kut rotacije mehanizma (ϑ_{\max}).
- Primjenom izraza (4.62) izračunava se bezdimenzijska značajka n .
- Uvjet primjene izraza (4.62) je geometrija mehanizma takva da vrijedi $0,5 \leq n < 4$.
- Ako je taj uvjet zadovoljen, izračunava se pomoću izraza (4.64) koeficijent krutosti K_{Θ} .
- Primjenom izraza (4.63) izračunava se zatim rotacijska krutost mehanizma K .
- Pomoću (4.65) izračunava se konačno moment M .

Na Slici 4.14 je za taj algoritam prikazano odgovarajuće korisničko sučelje na kojemu je kao primjer prikazan proračun s istim ulaznim podacima kao i u cjelini 3.5 za primjer proračuna *Elastica* metodom.



a)



b)

Slika 4.14 Grafičko korisničko sučelje programskog rješenja pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom (a) i dijagram ovisnosti rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma ϑ (b)

Rezultati proračuna / izlazni podaci iz programa su:

Za definirani maksimalni kut rotacije mehanizma $\vartheta_{max} = 30^\circ$ programsko rješenje pritiskom na dugme RAČUNAJ, za raspon kutova $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{max}$, crta sljedeće dijagrame:

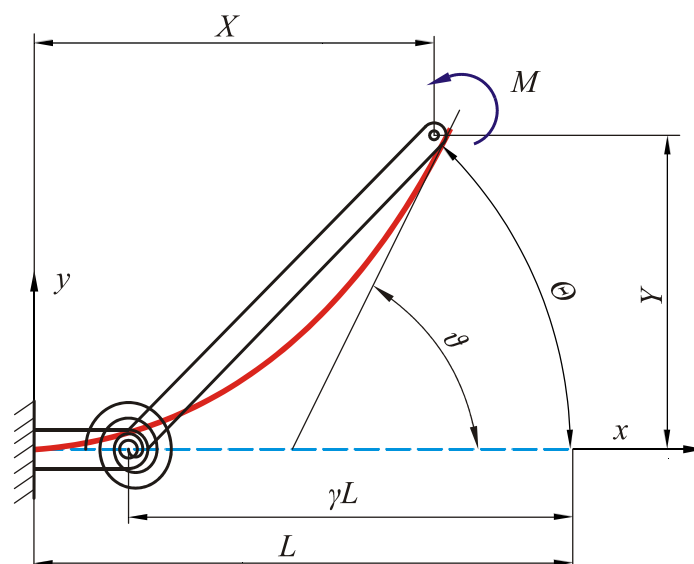
- dijagram ovisnosti momenta o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.14a) te
- dijagram ovisnosti rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.14b).

Na Slici 4.14a vidljivo je da moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije ϑ linearno raste s rastom tog kuta, a na Slici 4.14b da je rotacijska krutost mehanizma konstantna te u

zadanom primjeru iznosi $K = 0,767 \text{ Nm/rad}$.

4.2.2 Modeliranje rotacijskog podatljivog mehanizma modelom četveroštapnog mehanizma

Metoda opisana u cjelini 4.2.1 je, zbog svoje jednostavnosti, adekvatna za preliminarne proračune pri konstrukciji podatljivog mehanizma, ali se za točnije proračune koristi metoda pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma [Jensen, Howell, 2002]. Da bi se opisao taj model, na početku je potrebno pojasniti modeliranje lisnate opruge opterećene na slobodnom kraju momentom metodom pseudo–krutog modela lisnate opruge kako je prikazano na Slici 4.15 [Howell, 2001].



Slika 4.15 Pseudo–kruti model lisnate opruge opterećene na slobodnom kraju momentom (prema [Howell, 2001])

Kako bi se lisnata opruga čim vjernije aproksimirala pseudo–krutim modelom, odnosno kako bi se izračunala njena karakteristika ovisnosti opterećenja o progibu, od velike je važnosti odrediti položaj zgloba i krutost opruge pseudo–krutog modela. Položaj zgloba definira se pritom karakterističnim koeficijentom zakrivljenosti γ koji je određen primjenom metode konačnih elemenata. Prema [Howell, 2001], za lisnatu oprugu opterećenu momentom na slobodnom kraju vrijedi da je $\gamma = 0,8517$.

Prema Slici 4.15 može se tada odrediti položaj slobodnog kraja pseudo–krutog modela lisnate opruge definiran koordinatama (X, Y) [Howell, 2001]

$$\frac{X}{L} = 1 - \gamma(1 - \cos \Theta) \quad (4.66)$$

$$\frac{Y}{L} = \gamma \sin \Theta \quad (4.67)$$

Iz Slike 4.15 uočava se da je $\Theta \neq \vartheta$, a za slučaj lisnate opruge opterećene momentom na slobodnom kraju, prema [Howell, 2001], vrijedi

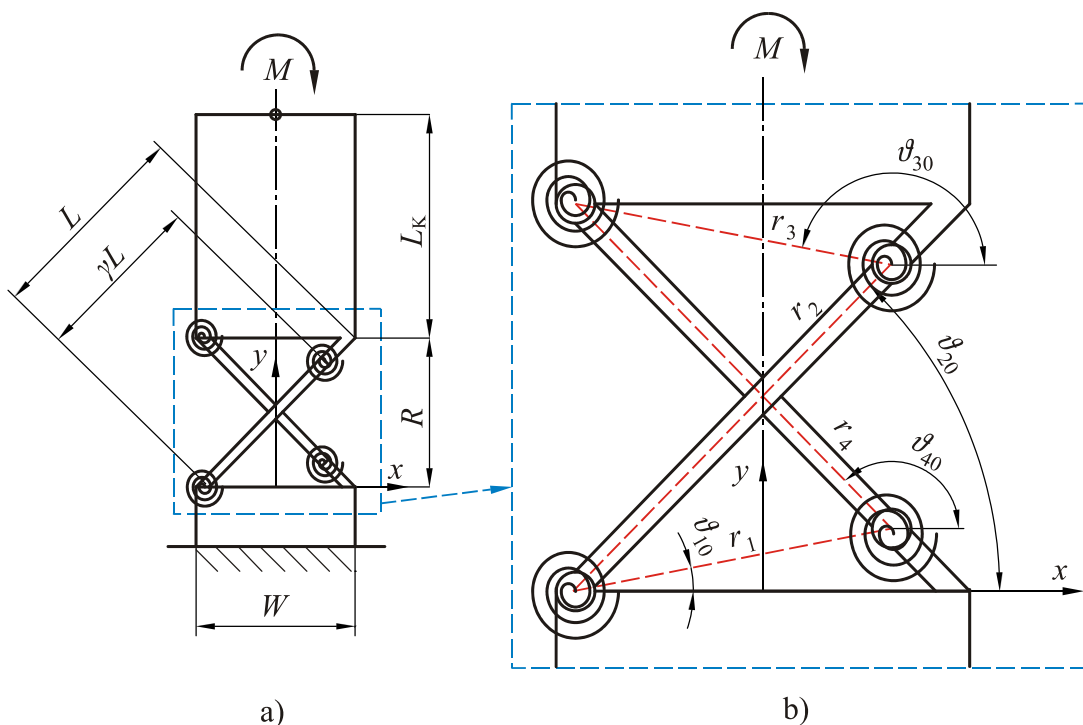
$$\vartheta = 1,2385\Theta \quad (4.68)$$

Rotacijska krutost pseudo–krutog modela lisnate opruge definirana je jednadžbom [Howell, 2001]

$$K = \gamma K_{\Theta} \frac{EI}{L} \quad (4.69)$$

gdje, u slučaju da je lisnata opruga na slobodnom kraju opterećena momentom, koeficijent krutosti, određen metodom konačnih elemenata, iznosi $K_{\Theta} = 2,67617$ [Howell, 2001].

Temeljem spomenutih činjenica metoda je u literaturi [Jensen, Howell, 2002] proširena i na ovdje razmatrane rotacijske podatljive mehanizme s lisnatim oprugama. Na Slici 4.16 prikazan je pseudo–kruti model četveroštapnog mehanizma opterećen momentom.



Slika 4.16 Modeliranje podatljivog zgloba s lisnatim oprugama kao pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma (prema [Jensen, Howell, 2002])

Kako je već prethodno navedeno, rotacijski podatljivi mehanizam je, u neopterećenom stanju, simetričan u odnosu na os y . U deformiranom je položaju os simetrije simetrala kuta rotacije

mehanizma \mathcal{G} . Simetrija omogućava da se rotacijski podatljivi mehanizam s lisnatim oprugama modelira kao pseudo–kruti model četveroštapnog mehanizma na način prikazan na Slici 4.16a. Prilikom primjene ove metode važno je voditi računa da su dva zgloba s oprugama, koji su na suprotnoj stani od smjera rotacije mehanizma, smještena u rubnim točkama lisnatih opruga, a druga dva zgloba na udaljenosti γL od dva prethodno spomenuta zgloba kao što je prikazano na Slici 4.16a. Metodom konačnih elemenata koeficijent γ je optimiziran na način da se minimizira bezdimenzijsko odstupanje krajnje točke mehanizma za veliki kut rotacije od 63° (1,1 rad) te su dobiveni polinomni izrazi ovisnosti te veličine o parametru geometrije mehanizma n [Jensen, Howell, 2002]

$$\gamma = 2,208105 - 10,0489n + 27,83212n^2 - 37,7021n^3 + 25,032n^4 - 6,5358n^5 \quad (4.70)$$

za $0,5 \leq n < 1,0$

$$\gamma = 0,811175 - 0,03329n + 0,008143n^2 - 0,00075n^3 \quad (4.71)$$

za $1,0 \leq n \leq 4,0$

Duljine štapova pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prikazane na Slici 4.16b definirane su pak izrazima [Jensen, Howell, 2002]

$$r_2 = r_4 = \gamma L \quad (4.72)$$

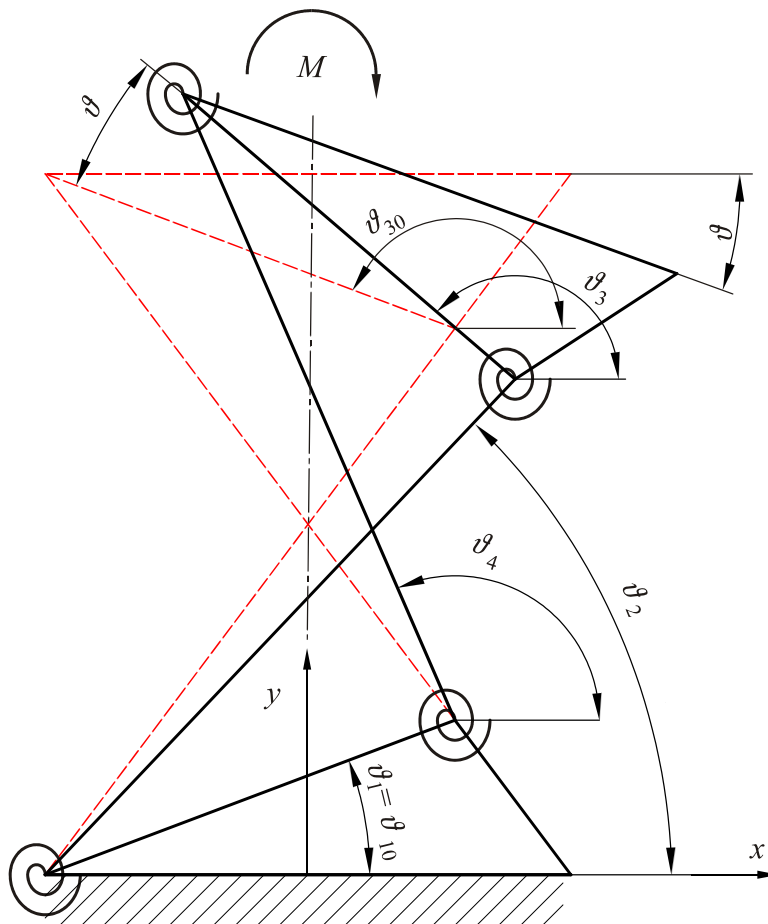
$$r_1 = r_3 = \sqrt{(\gamma W)^2 + R^2(1 - \gamma)^2} \quad (4.73)$$

Iz Slike 4.16b zaključuje se da su pripadajući kutovi \mathcal{G}_{10} i \mathcal{G}_{30} , štapova mehanizma prema osi x , poznati dok se kutovi \mathcal{G}_{20} i \mathcal{G}_{40} mogu izračunati prema Freudensteinovim jednadžbama za model četveroštapnog mehanizma koje glase [Jensen, Howell, 2002]

$$r_2 \cos \mathcal{G}_{20} + r_3 \cos \mathcal{G}_{30} = r_1 \cos \mathcal{G}_{10} + r_4 \cos \mathcal{G}_{40} \quad (4.74)$$

$$r_2 \sin \mathcal{G}_{20} + r_3 \sin \mathcal{G}_{30} = r_1 \sin \mathcal{G}_{10} + r_4 \sin \mathcal{G}_{40} \quad (4.75)$$

Indeks 0 u izrazima (4.74) i (4.75) označava vrijednosti kutova modela četveroštapnog mehanizma u nedeformiranom položaju. Pripadajući kutovi koje štapovi mehanizma zatvaraju s osi x u deformiranom položaju prikazani su na Slici 4.17. Izrazima (4.74) i (4.75) isto tako izračunavaju se i kutovi modela četveroštapnog mehanizma u deformiranom položaju, ali se tada u indeksima oznaka kutova izostavlja 0.



Slika 4.17 Kutovi štapova pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema osi x u deformiranom položaju

Prema Slici 4.17, za kutove, vrijedi

$$\vartheta_1 = \vartheta_{10} \quad (4.76)$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_{30} - \vartheta \quad (4.77)$$

dok se preostali kutovi ϑ_2 i ϑ_4 mogu odrediti iz izraza (4.74) i (4.75).

Princip optimizacije pseudo–krutog modela tijela (pri kutu $\vartheta = 63^\circ$) na temelju rezultata numeričkog modela konačnim elementima primijenjen je i pri određivanju krutosti pojedine ekvivalentne opruge četveroštapnog mehanizma optimiziranjem koeficijenta krutosti $K_{\Theta,4}$, pa vrijedi [Jensen, Howell, 2002]

$$K = \gamma K_{\Theta,4} \frac{EI}{L} \quad (4.78)$$

gdje je

$$K_{\Theta,4} = 1,075835 + 6,818114n - 13,6023n^2 + 11,52314n^3 - 3,53289n^4 \quad (4.79)$$

za $0,5 \leq n < 1,0$

$$K_{\Theta,4} = 2,241032 + 0,047655n - 0,00491n^2 \quad (4.80)$$

za $1,0 \leq n \leq 4,0$

Nakon definiranja krutosti ekvivalentnih opruga modela četveroštapnog mehanizma može se principom virtualnih radova definirati ovisnost momenta o kutu rotacije rotacijskog podatljivog mehanizma. Moment tada glasi [Jensen, Howell, 2002]

$$M = T_2 + T_3 - (T_1 + T_2) \frac{r_3 \sin(\vartheta_3 - \vartheta_4)}{r_2 \sin(\vartheta_4 - \vartheta_2)} - (T_3 + T_4) \frac{r_3 \sin(\vartheta_3 - \vartheta_2)}{r_4 \sin(\vartheta_4 - \vartheta_2)} \quad (4.81)$$

gdje su T_i pomoćni momenti za koje vrijedi da je

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\vartheta_2 - \vartheta_{20}) \\ T_2 &= K(\vartheta_2 - \vartheta_{20} - \vartheta_3 + \vartheta_{30}) \\ T_3 &= K(\vartheta_4 - \vartheta_{40} - \vartheta_3 + \vartheta_{30}) \\ T_4 &= K(\vartheta_4 - \vartheta_{40}) \end{aligned} \quad (4.82)$$

Najveći dopušteni kut rotacije mehanizma određen je najvećim dopuštenim naprezanjem. U ovom slučaju, najveće je naprezanje definirano kvadratnim polinomom [Jensen, Howell, 2002]

$$\sigma_{\max} = \frac{Et}{2R} (S_1 \vartheta + S_2 \vartheta^2) \quad (4.83)$$

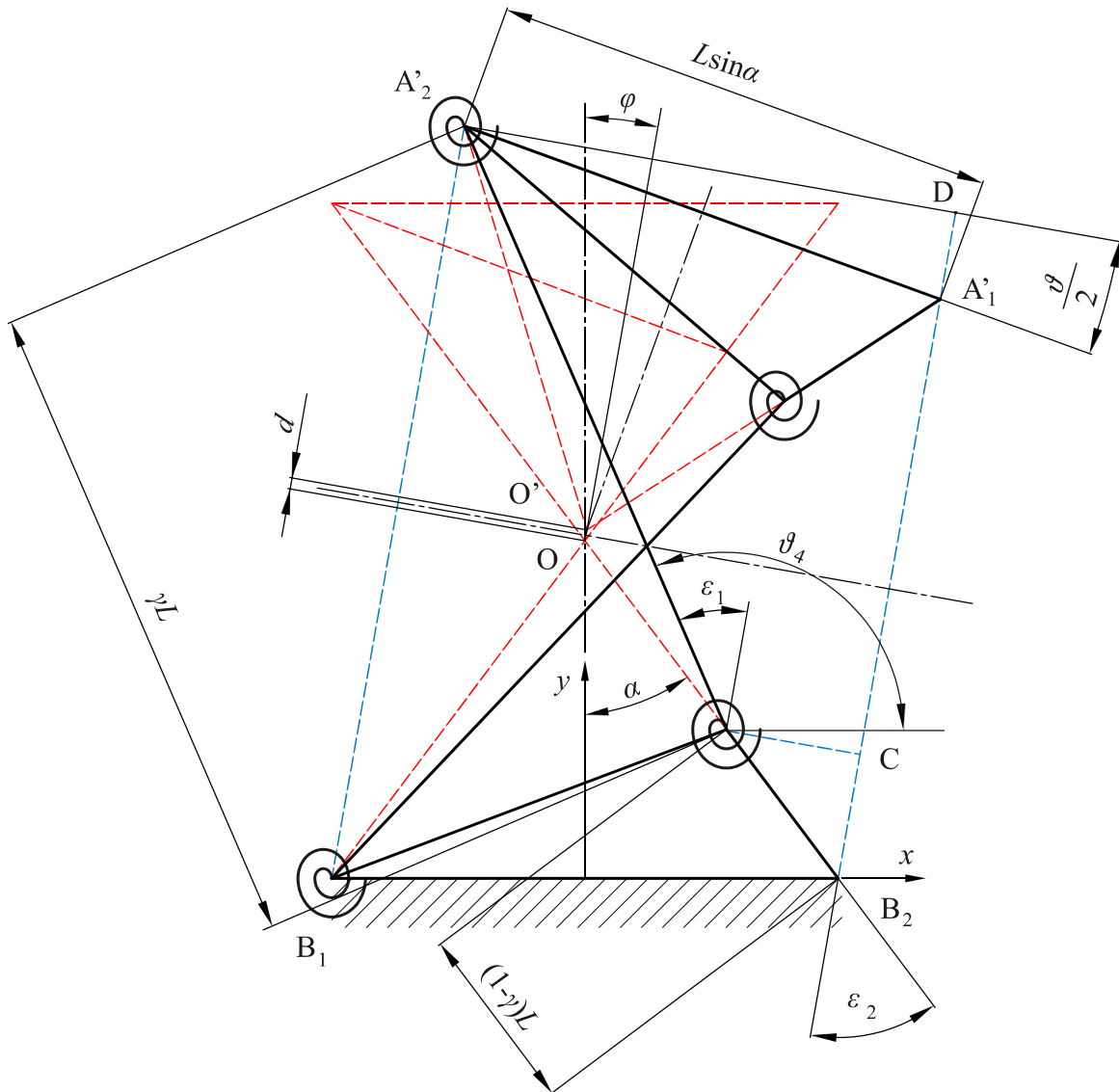
u kojem su S_1 i S_2 koeficijenti ovisni o značajki n , a dobiveni su također analizom metodom konačnih elemenata [Jensen, Howell, 2002], te glase

$$S_1 = 0,189394 + 0,899845n - 0,4333n^2 + 0,097866n^3 - 0,00839n^4 \quad (4.84)$$

$$S_2 = -0,09799 + 0,982995n - 0,96184n^2 + 0,413319n^3 - 0,008387n^4 + 0,00653n^5 \quad (4.85)$$

Autori pseudo-krutog modela četveroštapnog mehanizma [Jensen, Howell, 2002] nisu postavili izraze za izračun parazitnog pomaka rotacijskog podatljivog zgloba jer smatraju da se ovom metodom ne mogu dobiti dovoljno točni izrazi. Radi usporedbe s drugim metodama, za parazitni pomak pseudo-krutog modela četveroštapnog mehanizma u ovom su radu, a

prema Slici 4.18 izvedeni izrazi koji definiraju taj pomak.



Slika 4.18 Prikaz parazitnog pomaka podatljivog zgloba primjenom pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma

Temeljem geometrijskih odnosa vrijedi da je

$$|B_2A_1'| = |OO'| + |B_2O| \cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) + |A_1'O'| \cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = |B_2C| + |CD| - |DA_1'| \quad (4.86)$$

odnosno

$$d + L \cos \varepsilon_2 = L(1-\gamma) \cos \varepsilon_2 + \gamma L \cos \varepsilon_1 - L \sin \alpha \sin \frac{\gamma}{2} \quad (4.87)$$

gdje su

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(2\vartheta_4 - \pi + \vartheta) \quad (4.88)$$

$$\varepsilon_2 = \alpha + \frac{\vartheta}{2} \quad (4.89)$$

Sređivanjem izraza (4.87) i dijeljenjem s L dobiva se konačni izraz za izračun normalizirane veličine parazitnog pomaka

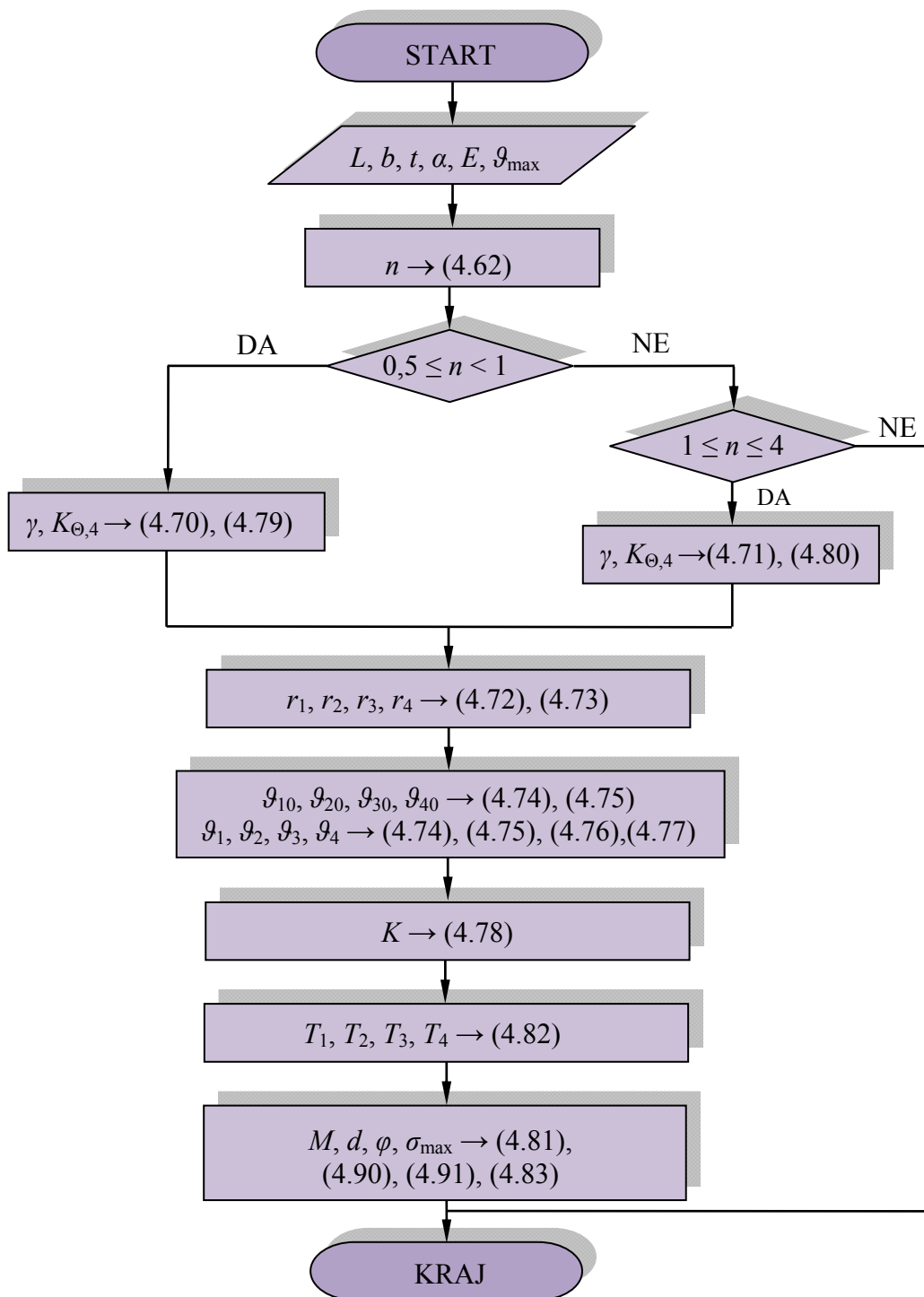
$$\frac{d}{L} = \gamma(\cos \varepsilon_1 - \cos \varepsilon_2) - \sin \alpha \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (4.90)$$

Faza parazitnog pomaka φ , je prema Slici 4.18 definirana izrazom

$$\varphi = \frac{\vartheta}{2} \quad (4.91)$$

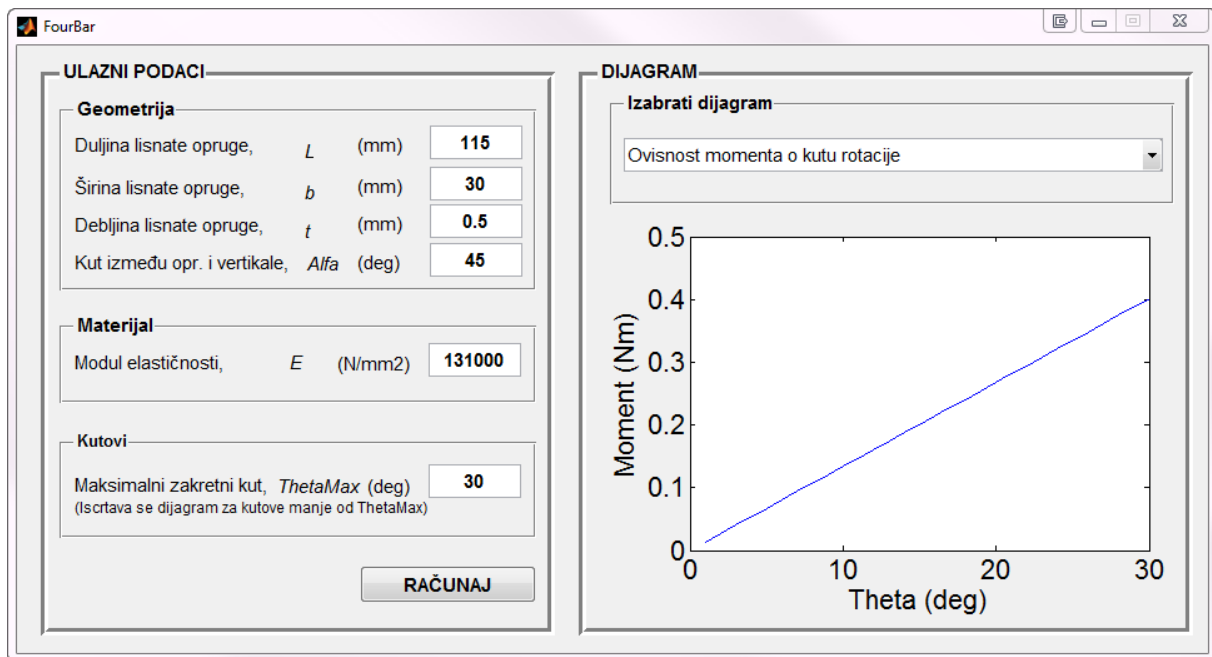
U programskom paketu MATLAB implementiran je analitički izračun pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma [MATLAB, 2010] čiji je dijagram dan je na slici 4.19 gdje je vidljivo da:

- Poznata je geometrija rotacijskog mehanizma (L, b, t, α), materijal lisnatih opruga (E) te najveći kut rotacije mehanizma (ϑ_{\max}).
- Pomoću izraza (4.62) izračunava se bezdimenzijska značajka n .
- Ako vrijedi uvjet $0,5 \leq n < 1$ izračunava se prema (4.70) karakteristični koeficijent zakrivljenosti γ , a prema (4.79) koeficijent krutosti $K_{\Theta,4}$.
- Ako pak vrijedi uvjet $1 \leq n \leq 4$ te se vrijednosti izračunavaju iz izraza (4.71) i (4.80).
- Duljine štapova pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma r_1, r_2, r_3 i r_4 izračunavaju se prema izrazima (4.72) i (4.73).
- Pomoću izraza (4.74), (4.75), (4.76) i (4.77) izračunavaju se kutovi štapova mehanizma prema osi x u početnom i u zakrenutom položaju: $\vartheta_{10}, \vartheta_{20}, \vartheta_{30}, \vartheta_{40}, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ i ϑ_4 .
- Primjenom izraza (4.78) izračunava se krutost ekvivalentnih opruga K .
- Pomoćni momenti T_1, T_2, T_3, T_4 izračunavaju se prema (4.82).
- Konačno, korištenjem izraza (4.81), (4.90), (4.91) i (4.83) izračunavaju se moment M , normalizirana veličina parazitnog pomaka d/L , faza parazitnog pomaka φ te najveće naprezanje σ_{\max} .



Slika 4.19 Dijagram toka programskog rješenja pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma

Na Slici 4.20 je za taj algoritam prikazano odgovarajuće korisničko sučelje na kojemu je kao primjer prikazan proračun s istim ulaznim podacima kao i u cjelini 3.5 za primjer proračuna *Elastica* metodom.



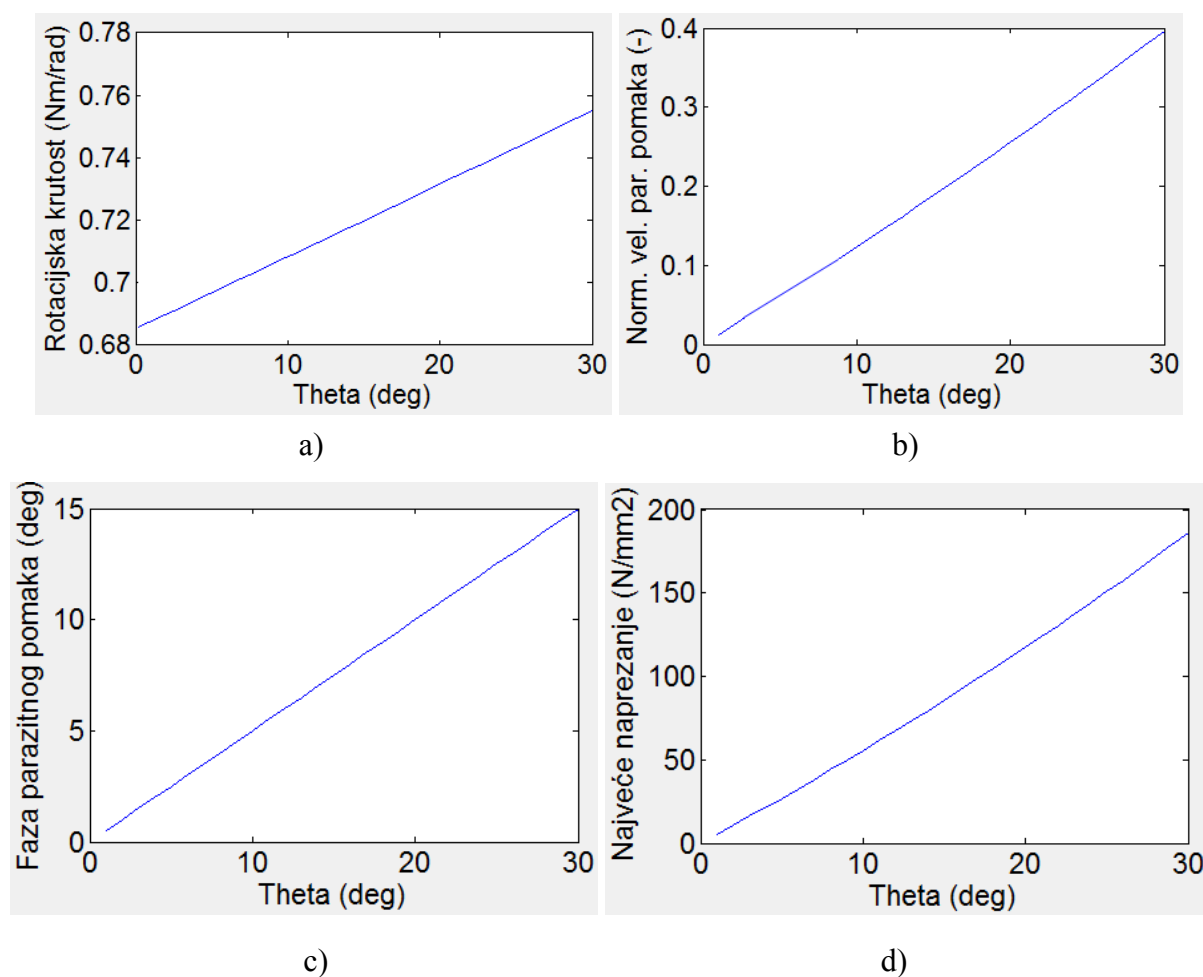
Slika 4.20 Grafičko korisničko sučelje programskog rješenja pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma

Rezultati proračuna / izlazni podaci iz programa su:

Za definirani maksimalni kut rotacije mehanizma $\vartheta_{\max} = 30^\circ$ programsko rješenje pritiskom na dugme RAČUNAJ, za raspon kutova $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}$, crta sljedeće dijagrame:

- Dijagram ovisnosti momenta o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.20).
- Dijagram ovisnosti rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.21a).
- Dijagram ovisnosti normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.21b).
- Dijagram ovisnosti faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.21c).
- Dijagram ovisnosti najvećeg naprezanja o kutu rotacije mehanizma (Slika 4.21d).

Prema Slikama 4.20 i 4.21 uočava se da moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma, rotacijska krutost mehanizma, normalizirana veličina parazitnog pomaka, faza parazitnog pomaka i najveće naprezanje dobiveni metodom pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma linearno rastu s porastom kuta rotacije mehanizma.



Slika 4.21 Dijagram ovisnosti rotacijske krutosti (a), normalizirane veličine parazitnog pomaka (b), faze parazitnog pomaka (c) te najvećeg naprezanja (d) o kutu rotacije mehanizma

Nešto novija metoda koja također primjenjuje pristup metode pseudo-krutog modela tijela je metoda opisana u referenci [Pei et al., 2009] i prikazana je na Slici 2.21. U tom je radu definiran i parazitni pomak rotacijskog podatljivog mehanizma čija se veličina u horizontalnom i vertikalnom smjeru može izračunati prema izrazima [Pei et al., 2009]

$$d_H = H \sin \vartheta \left(1 - \tan \alpha \sqrt{\frac{\frac{\gamma^2}{\sin^2 \alpha}}{\gamma^2 - 2N(\gamma - N)(1 - \cos \vartheta)} - 1} \right) \quad (4.92)$$

$$d_V = H \left(\cos \vartheta - 1 + \frac{\gamma}{N} \right) \left(\tan \alpha \sqrt{\frac{\frac{\gamma^2}{\sin^2 \alpha}}{\gamma^2 - 2N(\gamma - N)(1 - \cos \vartheta)} - 1} - 1 \right) \quad (4.93)$$

gdje je

$$\gamma = \frac{15N^2}{2 - 3N + 18N^2} \quad (4.94)$$

$$N = \frac{H}{H + H_f} \quad (4.95)$$

Prema Slici 2.21 za simetrične rotacijske podatljive mehanizme vrijedi $H = H_f$, pa se iz izraza (4.94) i (4.95) dobiva da je $N = 0,75$ i $\gamma = 0,75$.

Ukupna veličina parazitnog pomaka se onda može izračunati prema izrazu

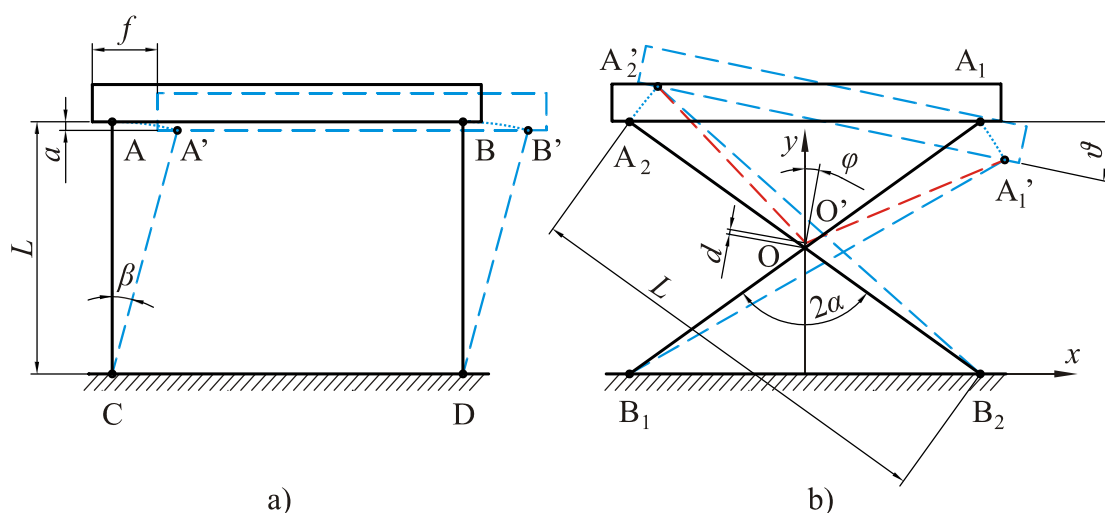
$$d = \sqrt{d_v^2 + d_H^2} \quad (4.96)$$

a faza parazitnog pomaka prema

$$\varphi = \arctan \frac{d_H}{d_v} \quad (4.97)$$

4.3 Geometrijska metoda zglobnog četverokuta

Rotacijski podatljivi mehanizam s lisnatim oprugama može se aproksimirati i zglobnim četverokutom kako je to prikazano na Slici 4.22b. U ovom se slučaju uopće ne uzimaju u obzir ni savijanje greda kojima se aproksimiraju lisnate opruge ali ni utjecaj aksijalnih sila na momente koji utječu na savijanje greda te tako i na ponašanje mehanizma [De Bona, Zelenika, 1993].



Slika 4.22 Zglobni četverokut (a) i aproksimacija rotacijskog podatljivog mehanizma zglobnim četverokutom (b)

Postave geometrijskog modela zglobnog četverokuta najlakše je shvatiti na jednostavnom primjeru translacijskog mehanizma prikazanog na Slici 4.22a. U tom se slučaju rotacijom štapa \overline{AC} za kut β , zakreće i štap \overline{BD} , a kruto tijelo \overline{AB} vrši translacijsko gibanje. Iz slike je vidljivo da je pomak krutog tijela identičan pomaku točke A u položaj A'.

Iz trokuta $\triangle AA'C$ određuje se pomak točke A pri čemu vrijede jednačbe za pomak po glavnom stupnju slobode gibanja f te parazitno spuštanje pokretnog tijela za veličinu a

$$f = L \sin \beta \quad (4.98)$$

$$a = L(1 - \cos \beta) \quad (4.99)$$

Normalizirane veličine pomaka dobivaju se dijeljenjem izraza (4.98) i (4.99) s duljinom štapa L pa vrijedi

$$\frac{f}{L} = \sin \beta \quad (4.100)$$

$$\frac{a}{L} = 1 - \cos \beta \quad (4.101)$$

Uvrštavanjem izraza (4.100) u (4.101), u slučaju kada vrijedi $f/L \ll 1$, pomak krutog tijela u horizontalnom smjeru iznosi [De Bona, Zelenika, 1993]

$$\frac{a}{L} = 1 - \cos\left(\arcsin \frac{f}{L}\right) \approx \frac{1}{2} \frac{f^2}{L^2} \quad (4.102)$$

Opisani postupak može se na istovjetan način primijeniti i na rotacijski podatljivi mehanizam prikazan na Slici 4.22b, odnosno na trokute $\triangle B_1A_1A_1'$ i $\triangle B_2A_2A_2'$ kako bi se u koordinatnom sustavu xy odredio položaj mehanizma u deformiranom stanju, a time i primarni pomak pomičnog bloka u položaj definiran točkama A_1' i A_2' ali i parazitni pomak točke O u O' [De Bona, Zelenika, 1993]. U tom se slučaju dobije rješenje u obliku kvadratne jednačbe

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (4.103)$$

s koeficijentima

$$\begin{aligned} A &= 8 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \\ B &= 8L \sin \alpha \cos \vartheta \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \\ C &= 2L^2 \left(\sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \vartheta \right) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Dobivaju se, budući da postoje dva moguća smjera rotacije mehanizma, dvije moguće koordinate točke A_2' u smjeru osi x

$$x_{A_2'1}, x_{A_2'2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.105)$$

Odabire se smjer rotacije mehanizma prikazan na Slici 4.22b pa vrijedi

$$x_{A_2'} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.106)$$

Moguće y koordinate točke A_2' dobivaju se uporabom Pitagorinog poučka, pa vrijedi

$$y_{A_2'1}, y_{A_2'2} = \pm \sqrt{L^2 - \left(L \sin \frac{\alpha}{2} - x_{A_2'} \right)^2} \quad (4.107)$$

Na Slici 4.22b vidljivo je da uvijek vrijedi $y_{A_2'} > 0$, pa je tako

$$y_{A_2'} = \sqrt{L^2 - \left(L \sin \frac{\alpha}{2} - x_{A_2'} \right)^2} \quad (4.108)$$

Na analogan način moguće je dobiti i koordinate točke A_1' u smjeru osi x

$$x_{A_1'} = x_{A_2'} + L \sin \alpha \cos \vartheta \quad (4.109)$$

te u smjeru osi y

$$y_{A_1'} = y_{A_2'} - L \sin \alpha \sin \vartheta \quad (4.110)$$

Koordinate točke O , prema Slici 4.22b definirane su izrazima

$$x_O = 0 \quad (4.111)$$

$$y_O = \frac{L}{2 \cos \alpha} \quad (4.112)$$

Za slučaj prikazan na Slici 4.22b koordinate točke O' izračunavaju se iz trokuta $\Delta O'A_1'A_2'$ prema jednadžbama

$$x_{O'} = x_{A_2'} + \frac{L}{2} \sin(\alpha - \vartheta) \quad (4.113)$$

$$y_{O'} = y_{A_2'} - \frac{L}{2} \cos(\alpha - \vartheta) \quad (4.114)$$

Pomak točke O u položaj O' u smjeru osi x , uz (4.111), iznosi tada

$$d_v = x_{O'} \quad (4.115)$$

u smjeru osi y pomak točke O u O' je pak

$$d_H = y_{O'} - y_O \quad (4.116)$$

Veličina i faza parazitnog pomaka se mogu izračunati primjenom izraza (4.96) i (4.97).

Geometrijska je metoda u drugom obliku primijenjena i u referenci [Troeger, 1962], a kako bi se odredio parazitni pomak rotacijskog podatljivog mehanizma. Rotacijski podatljivi mehanizam promatra se kao da na jednom kraju nema krutog tijela, posljedično, relativna udaljenost slobodnih krajeva lisnatih opruga više nije konstantna. Lisnate opruge rotacijskog mehanizma su neovisno opterećene jednakim momentima na pripadajućim slobodnim krajevima. Pomak geometrijskog središta se, nadalje, neovisno promatra kao da je 'vezan' uz pomak jedne odnosno druge lisnate opruge, te su dobivena dva krajnja položaja geometrijskog središta. Utvrđeno je da u oba slučaja veličina parazitnog pomaka iznosi [Troeger, 1962]

$$d' = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}{\vartheta} - \cos \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (4.117)$$

Ako se izraz (4.117) napiše u obliku reda funkcije uz pretpostavku da su kutovi rotacije mehanizma mali, dobiva se

$$d' = \frac{\sqrt{2}}{24} \vartheta^2 \quad (4.118)$$

Potom je provedena analiza ponašanja mehanizma kada su slobodni krajevi lisnatih opruga pričvršćeni za kruto tijelo i utvrđeno je da u tom slučaju veličina parazitnog pomaka iznosi [Troeger, 1962]

$$d = 2d' = \frac{\sqrt{2}}{12} \vartheta^2 \quad (4.119)$$

pa parazitni pomak u horizontalnom i u vertikalnom smjeru iznosi

$$d_v = \frac{\sqrt{2}}{12} g^2 \cos \frac{g}{2} \quad (4.120)$$

$$d_H = \frac{\sqrt{2}}{12} g^2 \sin \frac{g}{2} \quad (4.121)$$

Faza parazitnog pomaka može se izračunati primjenom izraza (4.97).

Nekoliko je autora u svojim radovima analiziralo samo parazitne pomake rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama primjenom kinematičkog modela rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatih oprugama [Wuest, 1950], [Hasselmeier, 1954] te [Hildebrand, 1958]. Kinematičkim se modelom gibanje geometrijskog središta rotacijskog podatljivog mehanizma aproksimira kotrljanjem (odvaljivanjem) dvaju valjaka (kružnica). Autori su dobili identične izraze kojima se definira veličina parazitnog pomaka u vertikalnom i u horizontalnom smjeru, koji glase

$$d_v = \frac{L}{12 \cos \alpha} g^2 \quad (4.122)$$

$$d_H = \frac{L}{72 \cos \alpha} g^3 \quad (4.123)$$

Veličina i faza parazitnog pomaka se, naravno, još jednom mogu izračunati primjenom izraza (4.96) i (4.97).

U ovoj su cjelini doktorske disertacije opisani različiti analitički pristupi izračunavanja rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama, a u programski paket MATLAB implementirani su analitički izračuni metodom približne zakrivljenosti, metodom pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom i četveroštapnog mehanizma te geometrijske metode zglobnog četverokuta. Rezultati dobiveni tim metodama će u sedmom poglavlju biti uspoređeni s rezultatima dobivenima metodom konačnih elemenata. Time će se ne samo odrediti utjecaj konstrukcijskih parametara na ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama, nego će se omogućiti i određivanje granice primjenjivosti pojedinih (približnih) metoda proračuna u ovisnosti o zahtijevanom stupnju točnosti samoga proračuna.

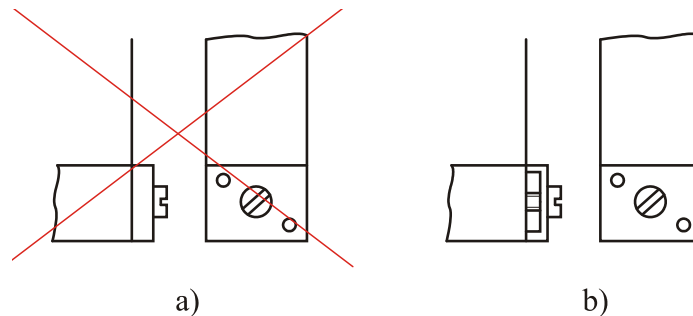
5 Eksperimentalna mjerenja

Nakon što su u dosadašnjem izlaganju opisane različite analitičke metode izračuna rotacijskih podatljivih mehanizama, u ovoj će cjelini doktorske disertacije, u cilju vrednovanja rezultata numeričkog modeliranja ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama, biti govora o eksperimentalnim mjerenjima dostupnima u literaturi. Eksperimentalni rezultati kasnije će se usporediti i s rezultatima numeričke analize metodom konačnih elemenata koja će biti opisana u idućoj cjelini.

Prilikom izrade i montaže rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama potrebno je voditi računa o nekoliko čimbenika:

- Potrebno je, prema preporukama [Ashwell, 1950], odabrati omjer $b^2/(tr)$ na način da se izbjegne ili barem svede na manju mjeru pojava antiklastičkog efekta čak i pri najvećim kutovima rotacije mehanizma.
- Treba koristiti kalibrirane montažne stege kako bi se osigurala jednaka duljina lisnatih opruga i spriječila njihova deformacija i prednaprezanje prilikom montaže [Nickols, Wunsch, 1951].
- Preporuča se spregnuti lisnate opruge stezačima u obliku slova U jer se na taj način osigurava blizak kontakt ruba stezača i lisnate opruge, posljedično postiže se jednaka aktivna duljina lisnate opruge po njenoj širini [Nat. Phy. Lab., 1956]. Na Slici 5.1a prikazan je ravan, a na Slici 5.1b stezač u obliku slova U.
- Eventualne nelinearnosti koje bi proizašle iz nesavršenosti montaže moguće je minimizirati zajedničkom strojnom obradom oba dijela uklještenja (fiksno dijela i same stezne pločice) [Zelenika, De Bona, 2002].

- Materijal lisnatih opruga treba omogućiti čim veću podatljivost mehanizma, što znači da lisnata opruga treba omogućiti čim veći progib, a da pritom naprezanja ne premaše dopuštena [Howell, 2001]. Kako bi se ispunio spomenuti zahtjev materijal lisnatih opruga mora imati čim veći omjer granice tečenja i modula elastičnosti [Weinstein, 1965], [Smith, Chetwynd, 1992]. Materijal s visokim omjerom $R_{p0,2}/E$ je, primjerice, slitina bakra i berilija, kod koje taj odnos poprima vrijednost $R_{p0,2}/E = 10$.



Slika 5.1 Ravni stezač (a) i stezač u obliku slova U (b)

U dostupnoj su literaturi pronađena eksperimentalna mjerenja koja su proveli Zelenika i De Bona [Zelenika, De Bona, 2002], Siddall [Siddall, 1970], Hildebrand [Hildebrand, 1958], Nickols i Wunsch [Nickols, Wunsch, 1951], Wuest [Wuest, 1950] te Young [Young, 1944]. Prilikom opisanih mjerenja simetrični rotacijski podatljivi mehanizmi bili su opterećeni momentom, a lisnate opruge sjekle su se u središnjim točkama pripadajućih aktivnih duljina. U radu [Zelenika, De Bona, 2002] provedena su i eksperimentalna mjerenja simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama opterećenih momentom i vertikalnom silom.

U referencama [Young, 1944], [Nickols, Wunsch, 1951] te [Siddall, 1970] mjereni su paraziti pomaci i rotacijska krutost mehanizma, dok su u referencama [Zelenika, De Bona, 2002], [Hildebrand, 1958] i [Wuest, 1950] predmet istraživanja bili paraziti pomaci tretiranih mehanizama.

U nastavku rada поближе će biti opisana eksperimentalna mjerenja provedena od strane Younga [Young, 1944], Nickolsa i Wunscha [Nickols, Wunsch, 1951] te Zelenike i De Bone [Zelenika, De Bona, 2002].

5.1 Youngov eksperiment

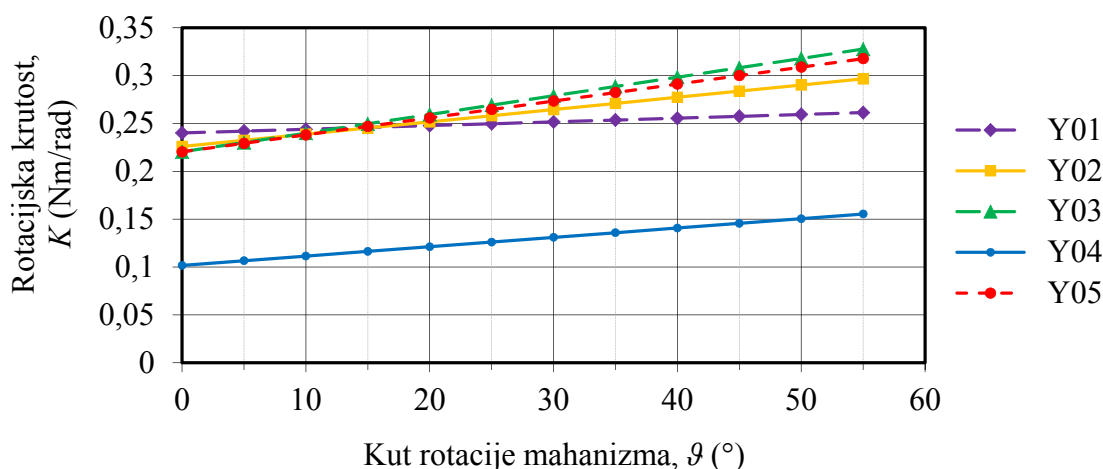
Eksperimentalna mjerenja u radu [Young, 1944] provedena su s ciljem analize karakterističnih parametara rotacijskog podatljivog mehanizma (rotacijske krutosti

mehanizma i parazitnih pomaka) pri velikim kutovima rotacije mehanizma. Isto tako, u radu su razvijeni i izrazi za izračun rotacijske krutosti mehanizma i veličinu parazitnog pomaka dobiveni na osnovu eksperimentalnih mjerenja. Kako bi se analizirao utjecaj promjene geometrije na karakteristične parametre rotacijskih podatljivih mehanizama, izvršeno je pet eksperimenata uz varijaciju geometrijskih karakteristika mehanizma, tj. poprečnih presjeka lisnatih opruga, njihovih duljina i kutova pod kojima se sijeku (Tablica 5.1). Opruge su izrađene iz čelika, a mehanizam je opterećen momentom.

Tablica 5.1 Geometrijske karakteristike modela korištenih u Youngovom eksperimentu

Ekspiriment	Y01	Y02	Y03	Y04	Y05
Duljina lisnate opruge, L (mm)	76,2	76,2	76,2	76,2	38,1
Širina lisnate opruge, b (mm)	9,525	9,525	9,525	11,94	11,94
Debljina lisnate opruge, t (mm)	0,3048	0,3048	0,3048	0,2159	0,2159
Kut između opruga, 2α (°)	30	60	90	60	60
Modul elastičnosti, E (N/mm ²)	210000	210000	210000	210000	210000

Na Slici 5.2 prikazani su rezultati mjerenja rotacijske krutosti dobiveni u tome radu.



Slika 5.2 Ovisnost rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma

Eksperimentom se ispitala ovisnost rotacijske krutosti o kutu između lisnatih opruga (Y01, Y02 i Y03) rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama i o njihovoj duljini (Y04 i Y05). Uočena je linearna ovisnost rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma. Usporedbom rezultata mjerenja Y01, Y02 i Y03 uočeno je da se ovisnost rotacijske krutosti o kutu između opruga može izraziti potenciranjem vrijednosti kuta potencijom 1,4. Usporedbom mjerenja Y04 i Y05 uočena je pak obrnuto proporcionalna ovisnost rotacijske krutosti o duljini lisnatih opruga.

Temeljem dobivenih rezultata mjerenja postavljen je izraz za rotacijsku krutost

$$K = n \frac{EI}{L} + \frac{1}{2} K_i \quad (5.1)$$

gdje je n broj lisnatih opruga.

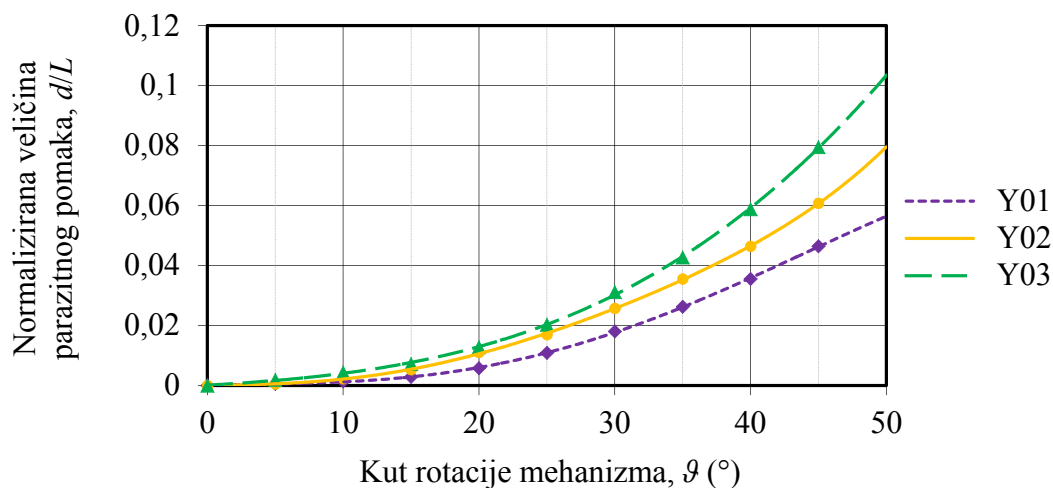
Prvi pribrojnik u izrazu (5.1) je krutost opruge pri kutu $\vartheta = 0^\circ$, dok drugi pribrojnik predstavlja prethodno spomenuti linearni rast rotacijske krutosti ovisan o kutu rotacije ϑ rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama.

Pri tome je

$$K_i = 23668 \left(\frac{bt^2 \vartheta \alpha^{1,4}}{L} \right) \quad (5.2)$$

Predmet provedenih istraživanja bilo je i utvrđivanje normalizirane veličine parazitnog pomaka rotacijskog podatljivog mehanizma d/L . Mjerenja parazitnih pomaka u smjerovima osi x i y , a time ni faze parazitnog pomaka φ nisu provedena. Provedena su tri različita mjerenja pri čemu je geometrija lisnatih opruga ostala nepromijenjena, a varirani su kutovi između njih i to redom $2\alpha = 30^\circ, 60^\circ$ i 90° (Y01, Y02 i Y03).

Na Slici 5.3 vidljiva je ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka d/L o kutu rotacije mehanizma ϑ dobivena od strane Younga [Young, 1944].



Slika 5.3 Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka mehanizma o kutu rotacije mehanizma

Dani su i polinomi koji opisuju spomenutu ovisnost. Dobivene vrijednosti moguće je tako aproksimirati sljedećim polinomima četvrtog reda [Young, 1944]

$$\frac{d}{L} = 0,022482\vartheta - 0,150844\vartheta^2 + 0,503143\vartheta^3 - 0,327615\vartheta^4 \quad \text{za Y01} \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{L} = -0,016415\vartheta + 0,200743\vartheta^2 - 0,250725\vartheta^3 + 0,197539\vartheta^4 \quad \text{za Y02} \quad (5.4)$$

$$\frac{d}{L} = 0,023680\vartheta - 0,040214\vartheta^2 + 0,238311\vartheta^3 - 0,080826\vartheta^4 \quad \text{za Y03} \quad (5.5)$$

Iz Slike 5.3 lako je zaključiti da normalizirana veličina parazitnog pomaka mehanizma, osim s porastom kuta rotacije mehanizma, raste i s rastom kuta α lisnatih opruga prema vertikali.

5.2 Nickolsov i Wunschov eksperiment

Cilj eksperimenta opisanog u radu [Nickols, Wunsch, 1951] utvrđivanje je utjecaja promjene duljine i debljine lisnatih opruga na rotacijsku krutost mehanizama, dok je pri utvrđivanju parazitnih pomaka varirana duljina opruga. Kut između lisnatih opruga je konstantan i iznosi $2\alpha = 90^\circ$, a lisnate opruge izrađene su iz čelika.

U Tablici 5.2 dane su geometrijske karakteristike modela korištenih u Nickolsovom i Wunschovom eksperimentu.

Tablica 5.2 Geometrijske karakteristike modela korištenih u Nickolsovom i Wunschovom eksperimentu

Eksperiment	N01 - N05	N06 - N10	N11 - N15
Duljina lisnate opruge, L (mm)	4,0132	10,414	16,764
Širina lisnate opruge, b (mm)	6,272	6,272	6,272
Debljina lisnate opruge, t (mm)	0,127 (N01) 0,165 (N02) 0,254 (N03) 0,381 (N04) 0,508 (N05)	0,127 (N06) 0,165 (N07) 0,254 (N08) 0,381 (N09) 0,508 (N10)	0,127 (N11) 0,165 (N12) 0,254 (N13) 0,381 (N14) 0,508 (N15)
Kut između opruga, 2α (°)	90	90	90
Modul elastičnosti, E (N/mm ²)	189605	189605	189605

Pretpostavljeno je da vrijedi izraz za rotacijsku krutost

$$K = Z \frac{EI}{L} \quad (5.6)$$

te je eksperimentom utvrđena vrijednost varijable Z .

Zglob je opterećivan momentom dok je istovremeno mjereno kut rotacije zgloba. Na osnovu dobivenih vrijednosti izračunava se rotacijska krutost mehanizma.

Rezultati mjerenja dani su tablično (Tablica 5.3).

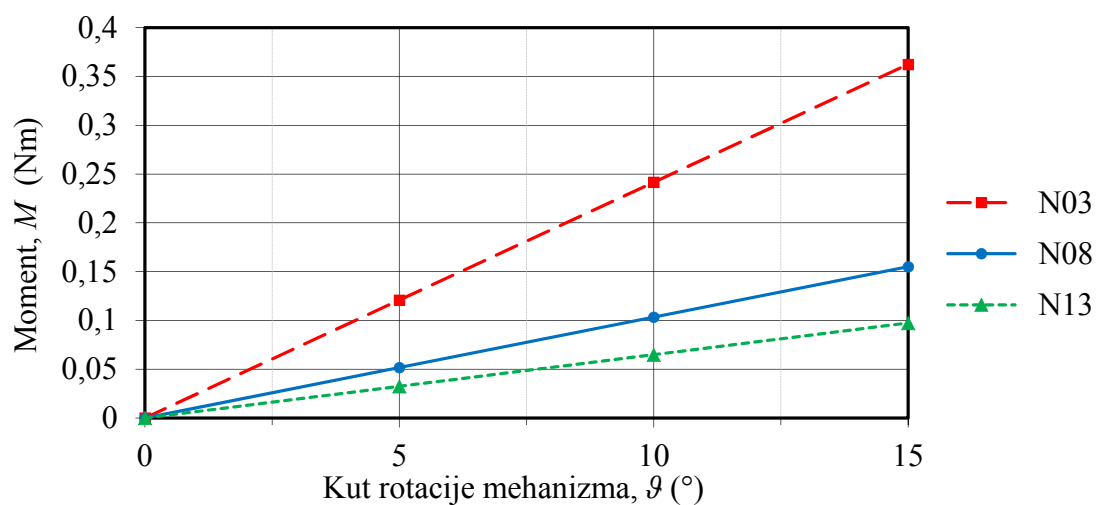
Tablica 5.3 Eksperimentalne vrijednosti rotacijske krutosti mehanizma

Eksperiment	K (Nm/rad)	$Z(-)$
N01	0,2169	2,917
N02	0,3966	3,086
N03	1,3976	3,129
N04	5,0244	2,905
N05	9,3676	3,056
N06	0,0757	3,313
N07	0,1706	3,293
N08	0,5909	3,233
N09	2,2766	3,401
N10	4,4629	3,338
N11	0,0610	3,621
N12	0,1073	3,336
N13	0,3830	3,580
N14	1,4586	3,464
N15	2,5614	3,603

Uočena je ovisnost varijable Z o duljini korištenih opruga te je postavljen odgovarajući izraz

$$Z = \frac{n}{L + 0,889} \quad (5.7)$$

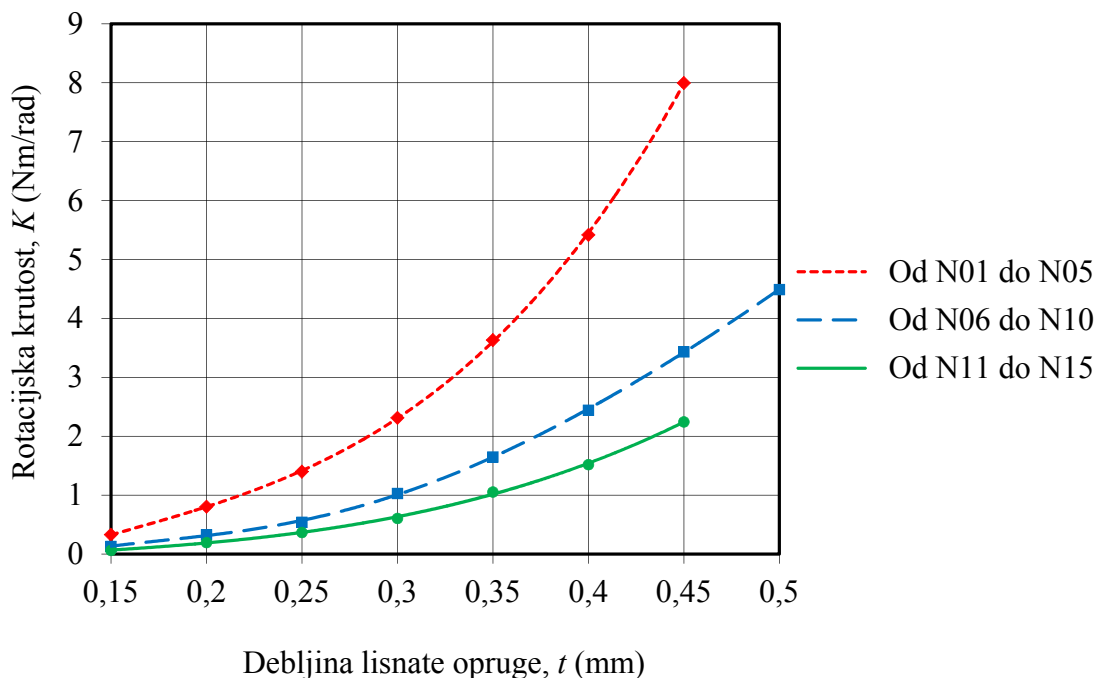
Na Slici 5.4 dana je ovisnosti kuta rotacije mehanizma o momentu kojim je zglob opterećen.



Slika 5.4 Ovisnost momenta M o kutu rotacije mehanizma ϑ

Prema Slici 5.4 moguće je zamijetiti linearnu ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije o tom kutu za kutove rotacije manje od 15° . Rezultati su dani za geometrije zglobova N03, N08 i N13, a kod svih eksperimentalnih mjerenja debljina lisnatih opruga je $t = 0,254$ mm. Uočava se da je moment potreban za postizanje određenog kuta rotacije mehanizma obrnuto proporcionalan duljini lisnatih opruga pa se najveći moment pojavio kod modela N03, a najmanji kod modela N13.

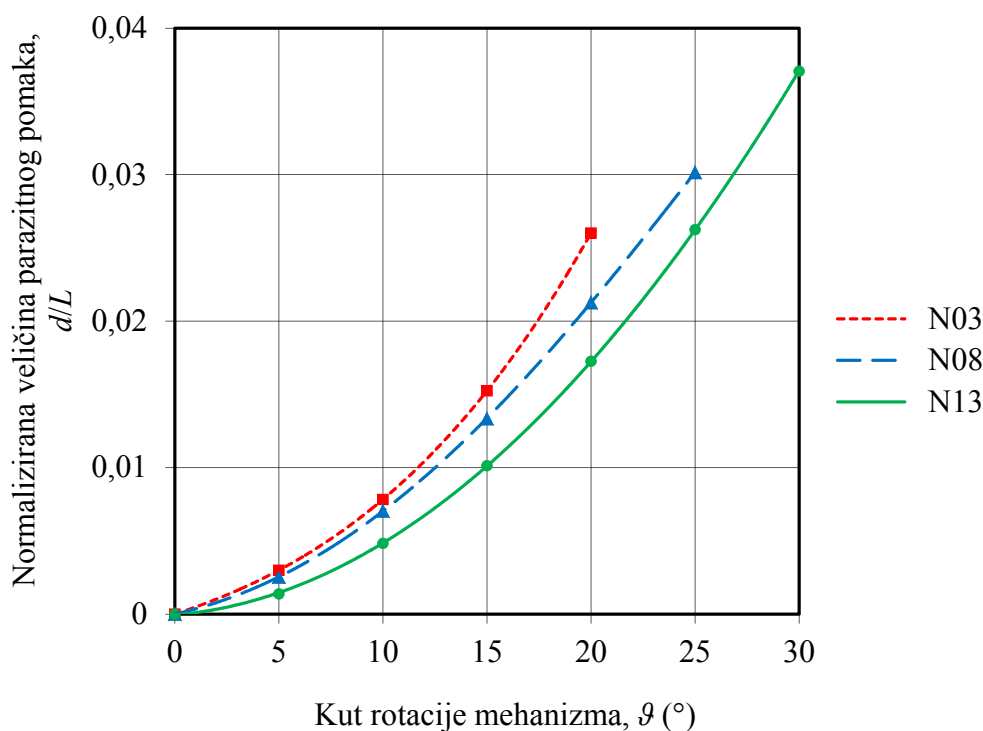
Na Slici 5.5 dana je ovisnost rotacijske krutosti mehanizma o debljini lisnatih opruga dobivena eksperimentalnim mjerenjima, te je utvrđeno da je odstupanje eksperimentalnih rezultata od rezultata dobivenih korištenjem aproksimacijskih izraza (5.6) i (5.7) manje od 1,5%.



Slika 5.5 Ovisnost rotacijske krutosti mehanizma o debljini lisnate opruge

Na Slici 5.5 vidljivo je da debljina lisnatih opruga utječe na rotacijsku krutost, odnosno da rotacijska krutost podatljivog mehanizma eksponencijalno raste s porastom debljine.

Predmet istraživanja Nickolsa i Wunscha bio je i parazitni pomak koji se promatra u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma, dok mjerenja parazitnih pomaka u smjerovima osi x i y , a time ni faze parazitnog pomaka φ nisu provedena. Grafički prikaz dobivenih rezultata dan je na Slici 5.6. Najmanja normalizirana veličina parazitnog pomaka javila se kod geometrije podatljivog mehanizma N13, a najveća kod N03.



Slika 5.6 Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije

5.3 Zelenikin i De Bonin eksperiment

U dostupnoj literaturi opisana su i eksperimentalna mjerenja koja su proveli Zelenika i De Bona 2002. godine [Zelenika, De Bona, 2002]. Cilj eksperimenta je, uz mjerenje veličine parazitnog pomaka rotacijskog podatljivog mehanizma u ovisnosti o kutu rotacije zgloba, i mjerenje faze jer je provedba eksperimenta omogućavala mjerenje komponenti parazitnih pomaka d_x i d_y u smjerovima osi x i y . Eksperiment je proveden u novije vrijeme kada je, u odnosu na prethodno opisana eksperimentalna mjerenja, na raspolaganju bila i mnogo preciznija mjerna oprema. Mjerenja su stoga omogućila puno manju nepouzdanost čime se, kako će se naknadno i pokazati, može ostvariti i puno bolje poklapanje rezultata mjerenja s rezultatima dobivenim analizom metodom konačnih elemenata, te će stoga provedba ovih eksperimentalnih mjerenja biti nešto detaljnije opisana.

5.3.1 Provedba eksperimentalnih mjerenja

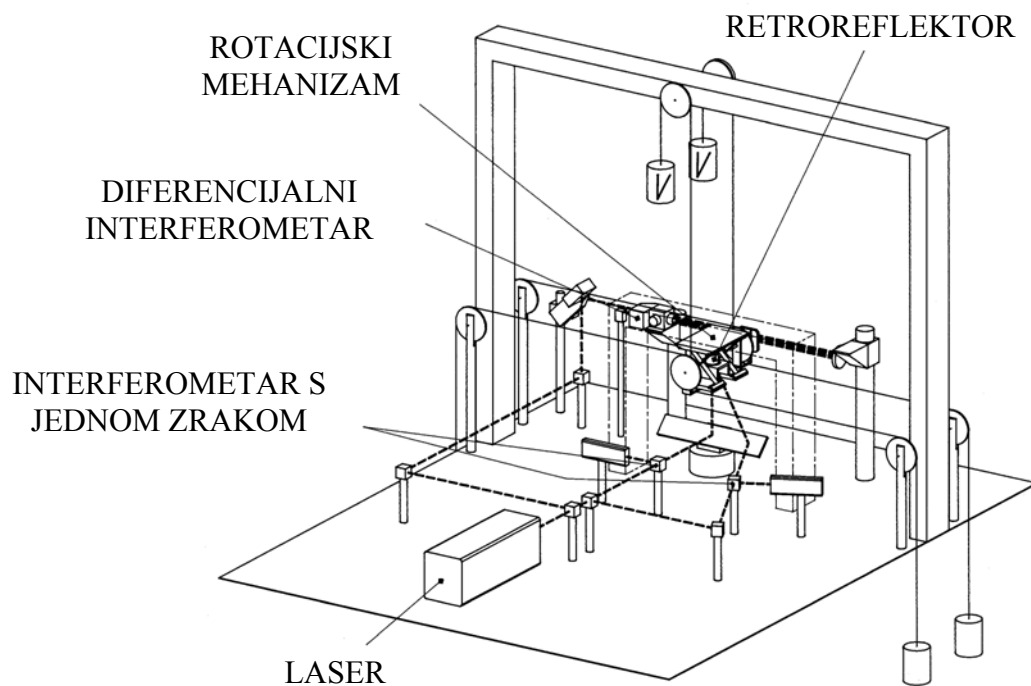
U radu [Zelenika, De Bona, 2002] uvažene su sve preporuke za izradu i montažu rotacijskih podatljivih mehanizama opisane na početku cjeline, a lisnate opruge izrađene su iz slitine bakra i berilija. Eksperimentalna mjerenja provedena su na rotacijskom podatljivom zglobu opterećenom momentom s geometrijskim karakteristikama i karakteristikama materijala

danim u Tablici 5.4.

Tablica 5.4 Geometrijske karakteristike modela korištenog u Zelenikinom i De Boninom eksperimentu

Eksperiment	ZdB
Duljina lisnate opruge, L (mm)	115
Širina lisnate opruge, b (mm)	15
Debljina lisnate opruge, t (mm)	0,5
Kut između opruga, 2α (°)	90
Modul elastičnosti materijala lisnatih opruga, E (N/mm ²) (slitina bakra i berilija)	131000
Modul elastičnosti materijala ostalih dijelova mehanizma, E (N/mm ²) (čelik AISI 304)	200000

Na Slici 5.7 prikazan je eksperimentalni postav.



Slika 5.7 Eksperimentalni postav [Zelenika, De Bona, 2002]

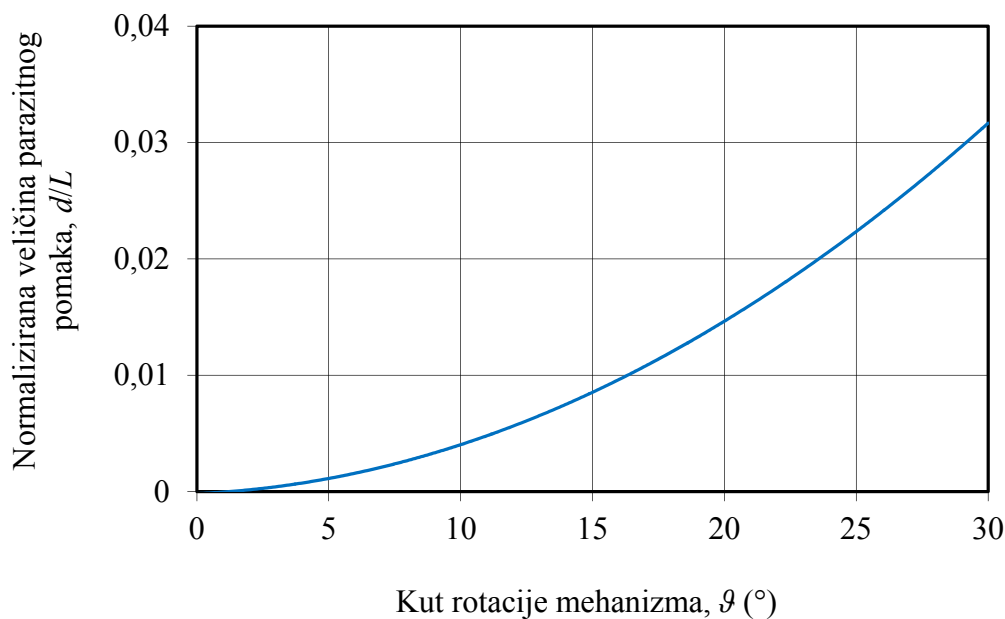
Za precizno i točno mjerenje putanje točke u trodimenzijskom prostoru u radu se koristi laserska interferometrijska trijagulacijska tehnika sljedbe trajektorije. Retroreflektor se pričvršćuje na pomični dio mehanizma, a mjere se promjene udaljenosti retroreflektora od triju laserskih interferometara. Budući da se u slučaju mjerenja parazitnog pomaka rotacijskog

podatljivog mehanizma radi o sljedbi trajektorije u ravnini, tj. problem je dvodimenzijski, uvodi se pojednostavljenje pa se za tu svrhu koriste dvije laserske zrake koje omogućuju mjerenje veličine parazitnih pomaka d_x i d_y u smjerovima osi x i y . Istovremeno se trećim laserskom snopom te korištenjem diferencijalnog laserskog interferometrijskog sustava provodi i mjerenje kuta rotacije zgloba.

Korištenjem takvog eksperimentalnog postava postignuta je razlučivost mjerenja od 10 nm pri mjerenju linearnih pomaka, dok je za kutne pomake postignuta razlučivost od 0,2 μ rad (tj. bolja od 0,05 lučnih sekundi). Maksimalni kut rotacije zgloba za koje su provedena mjerenja iznosio je 30°. Rezultirajuća mjerna nesigurnost je zanemariva, a uglavnom je uzrokovana sustavnim pogreškama (npr. pogreške pri montaži...), utjecajem okoline itd.

5.3.2 Rezultati eksperimentalnih mjerenja

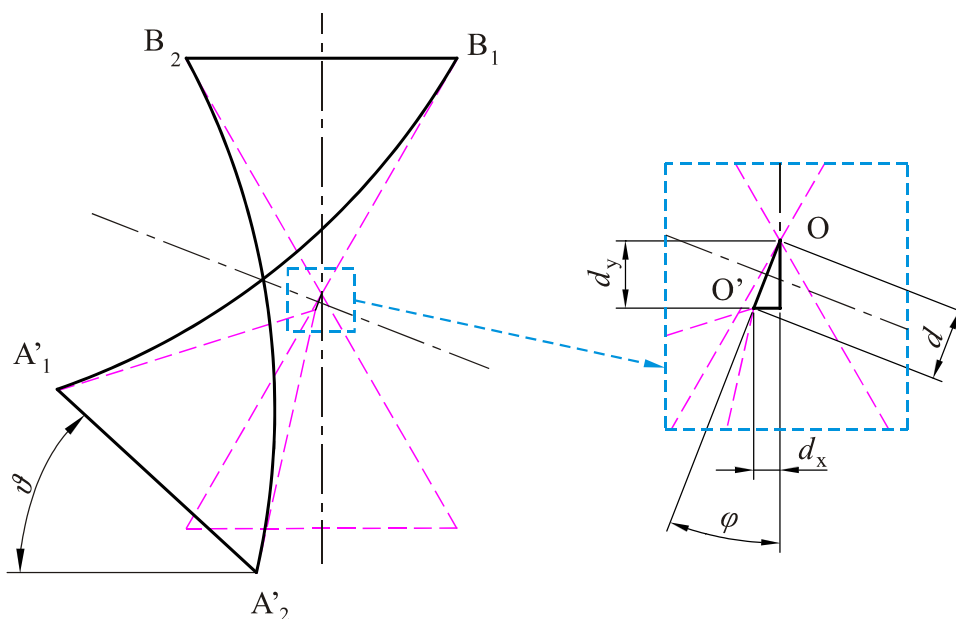
Mjerenja, opisana u radu [Zelenika, De Bona, 2002], dala su rezultate prikazane na Slici 5.8 gdje se vidi ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma.



Slika 5.8 Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma

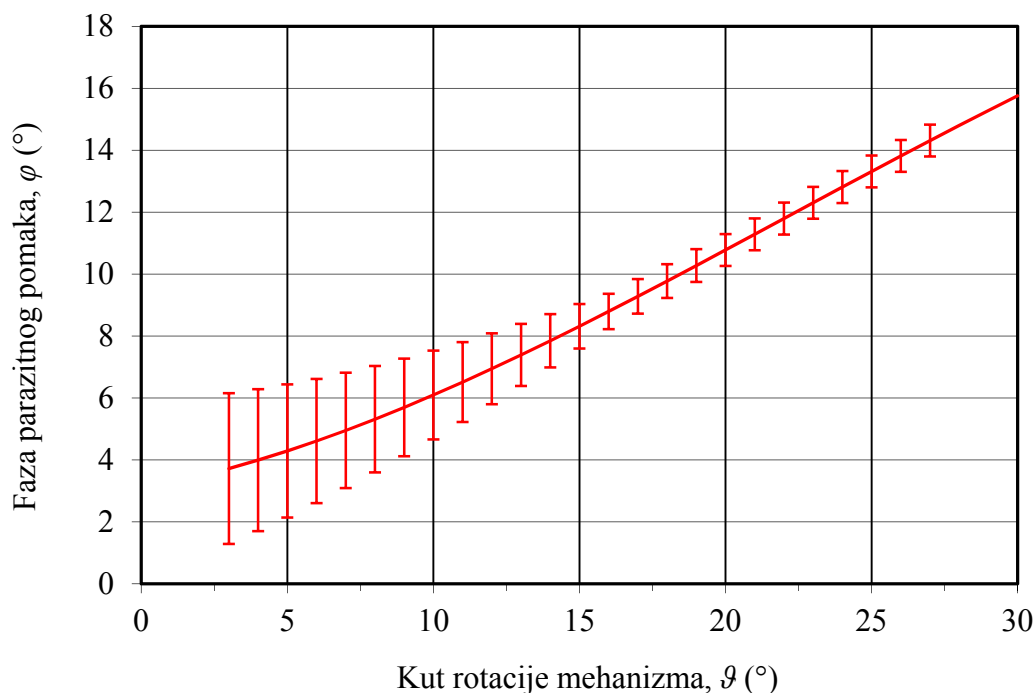
S obzirom da su mjereni parazitni pomaci d_x i d_y u smjerovima osi x i y , kako je prikazano na Slici 5.9, bilo je moguće izračunati i fazu parazitnog pomaka mehanizma φ . Iz Slike 5.9 vidljivo je da se faza φ može izračunati pomoću izraza

$$\varphi = \arctan \frac{d_x}{d_y} \quad (5.8)$$



Slika 5.9 Prikaz mjerenih parazitnih pomaka d_x i d_y i faze parazitnog pomaka φ

Promjena faze parazitnog pomaka φ u ovisnosti o kutu rotacije rotacijskog podatljivog mehanizma dobivena u [Zelenika, De Bona, 2002] dana je na Slici 5.10.



Slika 5.10 Ovisnost faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma

Promjena faze φ parazitnog pomaka gotovo je linearno ovisna o promjeni kuta rotacije mehanizma ϑ , ali se za male kutove rotacije uočava dosta velika nepouzdanost mjerenja uzrokovana dijeljenjem dvije vrlo male mjerene veličine (d_x i d_y) čije je rasipanje usporedivo

sa samom mjerenom veličinom. Nepouzdanost rezultata mjerenja stoga opada s porastom kuta rotacije kada mjerene veličine d_x i d_y rastu.

U Tablici 5.5 dane su geometrijske karakteristike modela korištenih u eksperimentalnim mjerenjima opisanima u referencama [Siddall, 1970], [Hildebrand, 1958] i [Wuest, 1950], dok su rezultati mjerenja prikazani u poglavlju 6.4.

Tablica 5.5 Geometrijske karakteristike modela korištenih u Siddallovom, Hildebrandovom i Wuestovom eksperimentu

Eksperiment	(S) Siddall	(H) Hildebrandt	(W) Wuest
Duljina lisnate opruga, L (mm)	10	80	27
Širina lisnate opruge, b (mm)	6	10	4,1
Debljina lisnate opruge, t (mm)	0,381	0,14	0,5
Kut između opruga, 2α (°)	90	90	90

U ovoj je cjelini disertacije, s ciljem u nastavku rada vrednovanja rezultata numeričkog modela dobivenog metodom konačnih elemenata, bilo govora o eksperimentalnim mjerenjima ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizma s lisnatim oprugama dostupnima u literaturi za različite konstrukcijske konfiguracije mehanizama i pri različitim pouzdanostima izloženih tehnika mjerenja.

6 Numerički model simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizama

U prethodnim poglavljima opisani su analitički modeli i dani rezultati eksperimentalnih mjerenja, dok će se u ovom poglavlju opisati numerički model ponašanja razmatranih mehanizama razvijen primjenom metode konačnih elemenata.

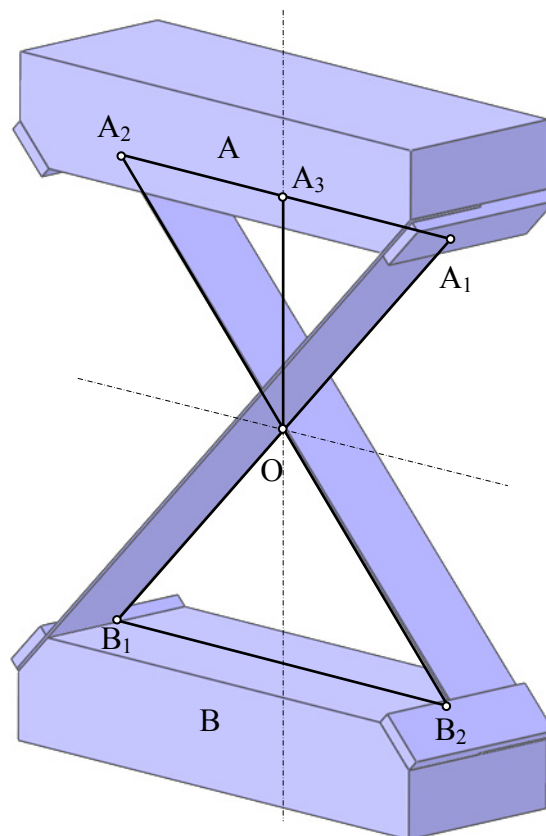
Analiza karakterističnih parametara rotacijskih podatljivih mehanizama metodom konačnih elemenata (MKE) provedena je pomoću programskog paketa ANSYS [Nakasone et al., 2006], [Ziekiewicz, 1977], [ANSYS 13.0, 2014]. Rezultati analize metodom konačnih elemenata usporedit će se zatim, s ciljem verifikacije predloženog postupaka numeričke analize s rezultatima eksperimentalnih mjerenja dostupnima u literaturi. Potom će se, u idućoj cjelini, s numeričkim modelom usporediti i opisani analitički modeli izračuna parametara rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama kako bi se utvrdio njihov stupanj točnosti.

6.1 Modeliranje rotacijskog podatljivog mehanizma

Geometrija rotacijskog podatljivog mehanizma modelirana je korištenjem programskog paketa ANSYS. Analiza metodom konačnih elemenata izvršena je za modele s geometrijskim karakteristikama i karakteristikama materijala danim u Tablici 5.1 i Tablici 5.4.

Iako se radi o trodimenzijskom problemu, zbog simetričnosti te rotacije mehanizma samo u jednoj ravnini, programski paket ANSYS omogućuje korištenje grednih elemenata (*beam*).

Gredni elementi su jednodimenzijski linijski elementi koji služe za modeliranje trodimenzijskih struktura, a računski su učinkovitiji od volumnih elemenata (*solid*) ili elemenata ljuski (*shell*) [ANSYS, 2014], [Madenci, Guven, 2006]. Zbog daljnjih pojednostavljenja, pomično kruto tijelo A (Slika 6.1) također je modelirano uz pomoć grednih elemenata. Kako bi se osigurala njegova krutost, odnosno konstantna udaljenost $|A_1A_2|$, krutom tijelu A pridijeljen je model materijala s izrazito visokim modulom elastičnosti ($E = 10^{12} \text{ N/mm}^2$). O načinu modeliranja nepomičnog krutog tijela B bit će riječi u nastavku rada.

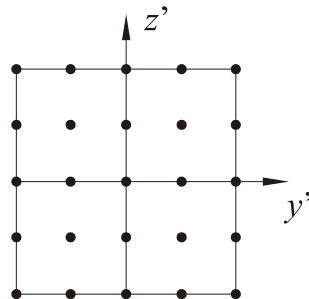


Slika 6.1 Model rotacijskog podatljivog zgloba koji će se modelirati grednim elementima

Modeliranje metodom konačnih elemenata započinje definiranjem položaja lisnatih opruga $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$, odnosno definicijom koordinata njihovih rubnih točaka (*keypoints*) u ravnini xy . Rubne točke spajaju se ravnim linijama koje su ujedno uzdužne osi lisnatih opruga. Iako lisnate opruge leže u istoj ravnini, one nemaju zajedničku točku već ih ANSYS 'promatra' kao da su mimosmjerne. Točke u kojima su lisnate opruge $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ spojene na kruta tijela A i B, ANSYS 'promatra' kao uklještenja i nije ih potrebno dodatno definirati.

Poprečni presjek konzolne grede (lisnate opruge), definira se u ravnini okomitoj na uzdužnu

os grede. Po definiciji geometrije poprečnog presjeka, u ANSYS-u se razvija numerički model kojim se definiraju svojstva poprečnog presjeka koristeći ćelije s devet čvorova (njihov skup čini poprečni presjek) [ANSYS, 2014]. Na Slici 6.2 prikazan je pravokutni poprečni presjek koji je definiran s četiri ćelije u ravnini $y'z'$.



Slika 6.2 Pravokutni poprečni presjek definiran s četiri ćelije u ravnini $y'z'$

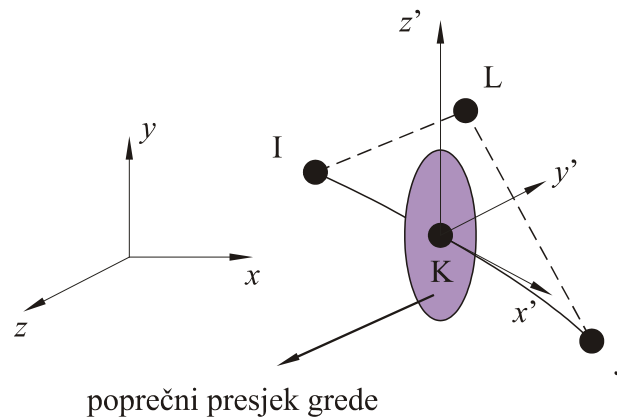
Kako bi se pojednostavilo očitavanje veličine i faze parazitnog pomaka rotacijskog podatljivog zgloba, modelu se dodaje vitka kruta greda definirana geometrijskim središtem podatljivog zgloba O i točkom A_3 (tj. središnjom točkom krutog tijela A). Greda je ukliještena u točki A_3 , a drugi kraj joj je slobodan, pa je pomak točke O slobodnog kraja konzole, koji se javlja uslijed rotacije zgloba, ujedno i parazitni pomak zgloba.

6.2 Osnovne postavke za numeričku analizu

6.2.1 Umrežavanje modela mehanizma

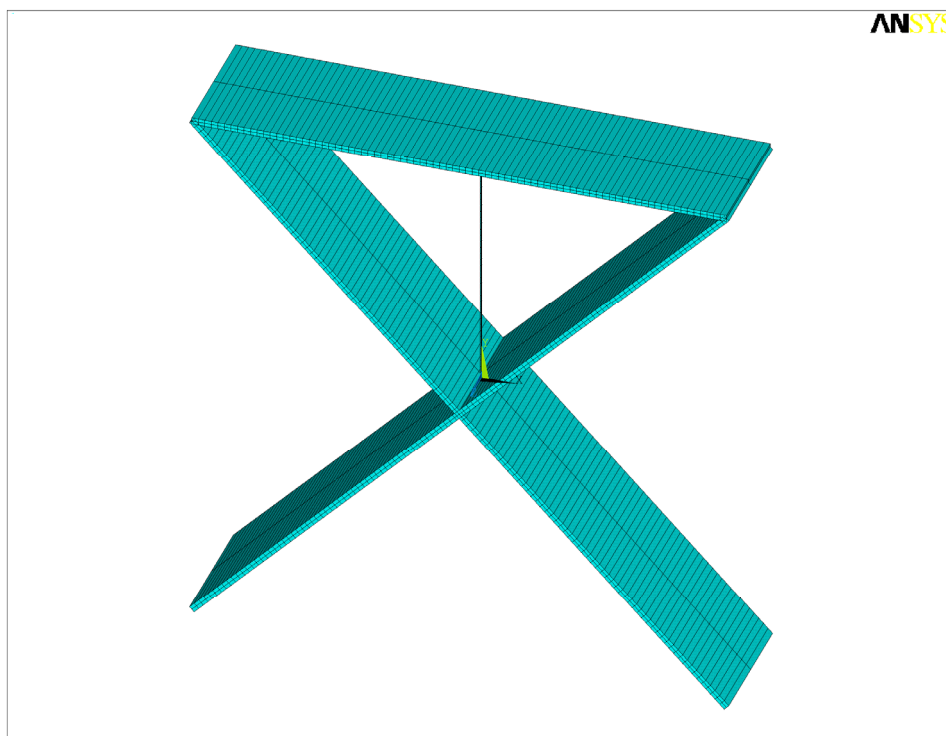
Koristeći odgovarajuće ANSYS korisničko sučelje, model rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama umrežen je konačnim elementima. Odabrani element je BEAM189 čije se karakteristike temelje na teoriji rješavanja grednih konzola koju je postavio Timoshenko [ANSYS, 2014]. Timoshenkova teorija greda poboljšana je Euler – Bernoullijeva teorija u kojoj je Timoshenko uzeo u obzir i utjecaj smicanja [ANSYS, 2014]. Kako bi se postigla čim veća točnost, a imajući u vidu da se radi o relativno jednostavnom modelu koji nije računski jako zahtjevan, za umrežavanje je odabran velik stupanj diskretizacije odnosno veći broj manjih elemenata [Nakasone et al., 2006]. ANSYS korisniku omogućuje odabir broja elemenata ili njihovu veličinu, a postoji i mogućnost da ANSYS samostalno odabere broj elemenata kojim će se umrežiti model.

Na Slici 6.3 prikazan je gredni element BEAM 189 definiran čvorovima I, K i J u globalnom koordinatnom sustavu xyz , dok se čvorom L određuje orijentacija elementa.



Slika 6.3 Gredni element BEAM189

Na Slici 6.4 prikazan je umreženi model rotacijskog podatljivog mehanizma, a odabrana veličina elemenata je 1mm. Za prikaz je odabran model mehanizma korištenog u eksperimentalnim mjerenjima u referenci [Zelenika, De Bona, 2002] čije su karakteristike navedene u Tablici 5.4.



Slika 6.4 Umreženi model rotacijskog podatljivog mehanizma

Karakteristike elementa BEAM 189 su:

- 3D kvadratni gredni element s 3 čvora (engl. *3-node*),
- šest stupnjeva slobode gibanja u svakom čvoru,
- pogodan za analizu vitkih greda,

- pogodan za linearnu i nelinearnu analizu (uključujući plastičnost i velike deformacije),
- pretpostavlja se da je vitoperenje poprečnog presjeka zanemarivo,
- dozvoljava promjenu momenata inercije poprečnog presjeka kao funkciju uzdužnog produljenja grede.

Numerička analiza rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama provedena je u područjima malih i velikih progiba, odnosno malih i velikih deformacija. Velike deformacije dovode do značajnije promjene geometrije problema (promjene površine ili debljine) što dovodi do geometrijskih nelinearnosti.

U trećoj cjelini spomenut je antiklastični efekt, pa je ovdje potrebno izvršiti kontrolu modela kako bi se utvrdilo da li će doći do njegove pojave. Potrebno je izračunati odnos $b^2/(tr)$ kako bi se odredilo da li se model može promatrati kao greda ili kao ploča, odnosno kako bi se odredilo koji će se modul elastičnosti primijeniti u modelu (vidjeti izraz (3.8)). Iz jednadžbe (3.32) može se zaključiti da se s povećanjem opterećenja lisnate opruge smanjuje polumjer zakrivljenosti r elastične linije, čime se povećava vrijednost $b^2/(tr)$. S porastom odnosa $b^2/(tr)$ lisnata se opruga počinje ponašati poput ploče, te je potrebno modul elastičnosti E zamijeniti s modificiranim modulom elastičnosti $E/(1-\nu^2)$. Doista, kada se lisnata opruga promatra kao greda pretpostavlja se ravninsko stanje naprezanja, dok se u slučaju ploče pretpostavlja ravninsko stanje deformacije [Brnić, 1996]. Kod grede se prilikom savijanja u dijelu poprečnog presjeka gdje vlada vlak javlja, u ovisnosti o Poissonovom broju ν , poprečno smanjenje presjeka, dok se u dijelu gdje vlada tlak javlja poprečno proširenje presjeka što sve rezultira poprečnom zakrivljenošću prikazanom na Slici 3.2. Kod ravninskog stanja deformacije (ploče) to je onemogućeno (osim na samom rubu ploče) pa po gornjoj relaciji dolazi praktički do povećanja krutosti. Ne postoji pritom stroga granica kada se u proračunu koristi E , a kada $E/(1-\nu^2)$, odnosno kada se iz ravninskog stanja naprezanja prelazi u ravninsko stanje deformacije, već se promjena modula elastičnosti E određuje u ovisnosti o faktoru Φ [Ashwell, 1950], [Angeli et al., 2006] definiranom u nastavku.

Jednadžba elastične linije, ako je opterećenje dovoljno veliko, odnosno polumjer zakrivljenosti elastične linije lisnate opruge dovoljno mali, prelazi iz navedenog razloga iz oblika

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (6.1)$$

u oblik

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}(1-\nu^2) \quad (6.2)$$

Promjena modula elastičnosti između ta dva krajnja slučaja uzima se u obzir izrazom [Ashwell, 1950]

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI\Phi} \quad (6.3)$$

Faktor Φ ovisi o promjeni $b^2/(tr)$, odnosno koeficijentu ab koji se definira izrazom [Ashwell, 1950], [Angeli et al., 2006]

$$\alpha b = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{b}{\sqrt{tr}} \quad (6.4)$$

Izraz za izračun faktora Φ je [Ashwell, 1950], [Angeli et al., 2006]

$$\Phi = \frac{1}{1-\nu^2} - \frac{2\sqrt{3}\nu}{\alpha b\sqrt{1-\nu^2}} F(\alpha b) + \frac{3}{2\alpha b} f(\alpha b) \quad (6.5)$$

gdje je

$$F(\alpha b) = (B_1 + B_2) \sinh \frac{\alpha b}{2} \cos \frac{\alpha b}{2} - (B_1 - B_2) \cosh \frac{\alpha b}{2} \sin \frac{\alpha b}{2} \quad (6.6)$$

$$f(\alpha b) = 2(B_1^2 + B_2^2)(\sinh \alpha b + \sin \alpha b) + (B_1^2 - B_2^2 + 2B_1B_2) \cosh \alpha b \sin \alpha b + (B_1^2 - B_2^2 - 2B_1B_2) \sinh \alpha b \cos \alpha b + 2(B_1^2 - B_2^2) \alpha b \quad (6.7)$$

$$B_1 = \frac{\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\sinh \frac{\alpha b}{2} \cos \frac{\alpha b}{2} - \cosh \frac{\alpha b}{2} \sin \frac{\alpha b}{2}}{\sinh \alpha b + \sin \alpha b} \quad (6.8)$$

$$B_2 = \frac{\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\sinh \frac{\alpha b}{2} \cos \frac{\alpha b}{2} + \cosh \frac{\alpha b}{2} \sin \frac{\alpha b}{2}}{\sinh \alpha b + \sin \alpha b} \quad (6.9)$$

Provjerom vrijednosti $b^2/(tr)$ koje se dobivaju opterećivanjem rotacijskih podatljivih mehanizama s karakteristikama danim u Tablici 5.1 i Tablici 5.4, zaključeno je da je u nekim stanjima opterećenja (pri većim kutovima rotacije) potrebna korekcija modula elastičnosti materijala lisnatih opruga. Za izračun faktora Φ izrađeno je programsko rješenje u programskom paketu MATLAB koristeći izraze (6.3) do (6.9). S obzirom, pak, da je analizu metodom konačnih elemenata potrebno provesti na velikom broju modela različitih

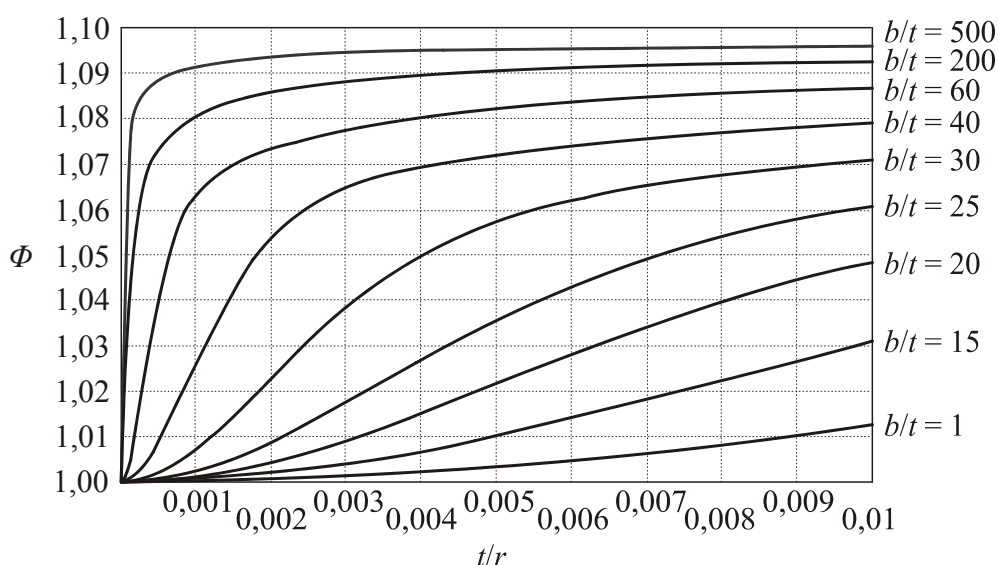
geometrijskih karakteristika, a kako bi se zbog znatno kraćeg vremena računanja u odnosu na volumne elemente, mogli koristiti linijski elementi BEAM 189, korekcija modula elastičnosti provodi se na sljedeći način:

- Analiza modela rotacijskog podatljivog mehanizma metodom konačnih elemenata provodi se koristeći modul elastičnosti materijala lisnate opruge E .
- Vršiti se izračun polumjera zakrivljenosti elastične linije lisnate opruge kroz tri točke.
- U ovisnosti o vrijednostima b , t i r izračunava se, primjenom izraza (6.4) do (6.9), faktor Φ .
- Vršiti se korekcija modula elastičnosti primjenom izraza

$$E' = \Phi E \quad (6.10)$$

- Vršiti se konačno analiza rotacijskog podatljivog mehanizma metodom konačnih elemenata koristeći modificirani modul elastičnosti materijala lisnate opruge E' dobiven primjenom izraza (6.10).

Na Slici 6.5, grafički je prikazana ovisnost faktora Φ o promjeni vrijednosti t/r i odnosa b/t .

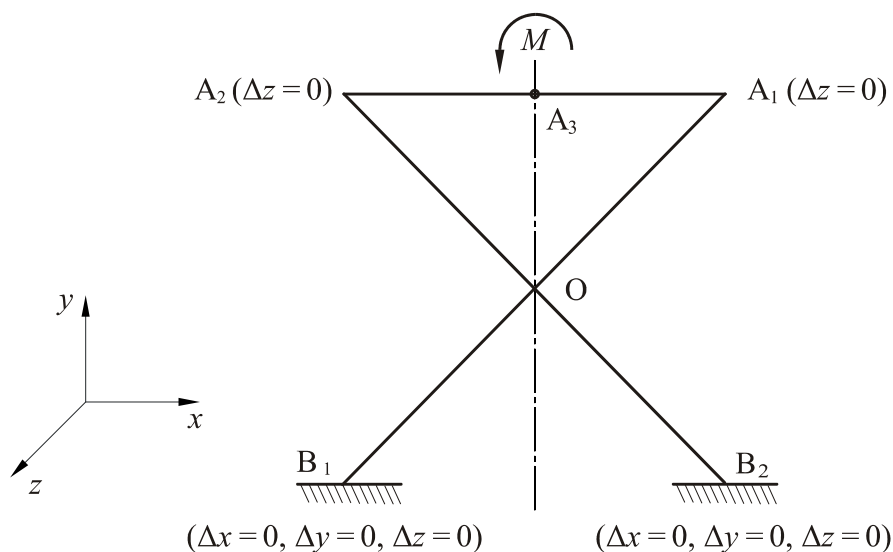


Slika 6.5 Primjer ovisnosti faktora Φ o promjeni vrijednosti t/r i b/t za $\nu = 0,33$ (prema [Angeli et al., 2006])

6.2.2 Rubni uvjeti

Rubni uvjeti na modelima računatima metodom konačnih elemenata prikazani su na Slici 6.6. Naime, rubnim točkama lisnatih opruga B_1 i B_2 onemogućeno je svih 6 stupnjeva slobode gibanja, pa nema potrebe modelirati kruto tijelo B. Isto tako zbog dvodimenzijskog problema, onemogućen je pomak rubnih točaka A_1 i A_2 lisnatih opruga u smjeru osi z .

Mehanizam je opterećen momentom u točki A_3 .



Slika 6.6 Rubni uvjeti korištenog modela metode konačnih elemenata

6.2.3 Opterećenje rotacijskog podatljivog mehanizma

Analiza metodom konačnih elemenata provodi se u području većih kutova rotacije pa se, kako bi se uzele u obzir nelinearnosti proizašle iz značajne promjene geometrije lisnatih opruga, primjenjuje nelinearna analiza. Programski paket ANSYS na osnovu zadanih ulaznih podataka (geometrije, materijala, rubnih uvjeta, opterećenja i odabira velikih deformacija) 'zaključuje' da se radi o nelinearnoj analizi. Opterećenje rotacijskog mehanizma izvodi se inkrementalno, na način da se definira maksimalni moment i broj koraka povećanja momenta od minimalne do maksimalne vrijednosti. Za svaki model pronađen je moment koji uzrokuje željeni najveći kut rotacije mehanizma, a potom je broj koraka povećanja momenta određen tako da porast kuta rotacije mehanizma nakon svakog koraka iznosi cca. 5° . Broj koraka treba biti takav da se može ostvariti konvergencija rezultata Newton – Raphsonovom metodom. Ukoliko rješenje ne konvergira, izračun se zaustavlja te se povećava broj koraka povećanja opterećenja. Doista, prilikom proračuna su se pri analizi vrlo tankih i dugačkih lisnatih opruga javljale poteškoće u obliku otežane konvergencije rezultata. Zbog toga se mijenjao broj koraka povećanja opterećenja i povećao maksimalni broj iteracija.

6.3 Očitavanje rezultata

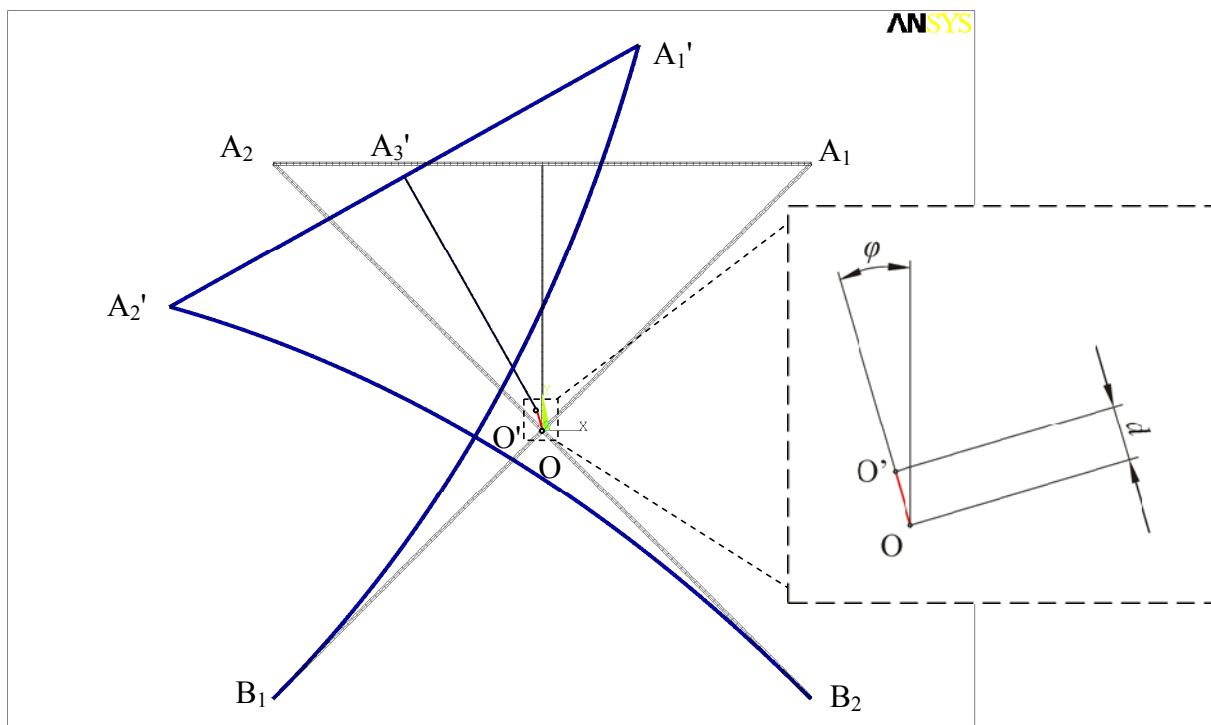
Metodom konačnih elemenata analizirani su sljedeći čimbenici:

- ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma o tom

kutu i utjecaj antiklastičnog efekta na moment,

- rotacijska krutost u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma i utjecaj antiklastičnog efekta na rotacijsku krutost,
- normalizirana veličina parazitnog pomaka u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma,
- faza parazitnog pomaka u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma,
- najveća naprežanja koja se javljaju u mehanizmu, pri čemu se, naravno, najveća naprežanja očekuju u uklještenjima [Timoshenko, 1948],
- stabilnost rotacijskog mehanizma.

Na Slici 6.7 dan je prikaz modela rotacijskog podatljivog mehanizma u deformiranom položaju, te je vidljiva veličina parazitnog pomaka $d = |OO'|$, faza φ parazitnog pomaka, položaj rubnih točaka u početnom položaju pomičnog krutog tijela (A_1 i A_2) i u zakrenutom položaju (A_1' i A_2'). Na slici je prikazan model pri kutu rotacije od 30° korišten u eksperimentalnim mjerenjima u referenci [Zelenika, De Bona, 2002].



Slika 6.7 Prikaz rotacijskog podatljivog mehanizma u deformiranom položaju s naznačenim parazitnim pomakom

ANSYS omogućuje očitavanje ukupnog pomaka svakog čvora mreže, pa se kut rotacije zgloba može izračunati kada je poznat pomak krutog tijela A koji je definiran pomakom njegovih rubnih točaka, a računa se prema izrazu

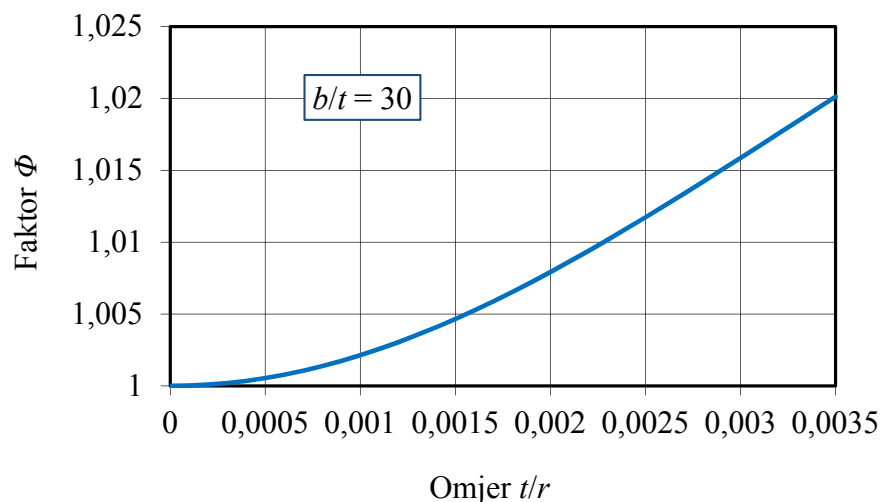
$$\vartheta = \arctan \frac{|\Delta y_{A1}| + |\Delta y_{A2}|}{L \sin \alpha} \quad (6.11)$$

gdje su Δy_{A1} i Δy_{B2} pomaci rubnih točaka A_1 i A_2 u smjeru osi y .

U nastavku rada prikazani su rezultati metode konačnih elemenata za model korišten u eksperimentalnim mjerenjima u referenci [Zelenika, De Bona, 2002].

6.3.1 Utjecaj antiklastičnog efekta

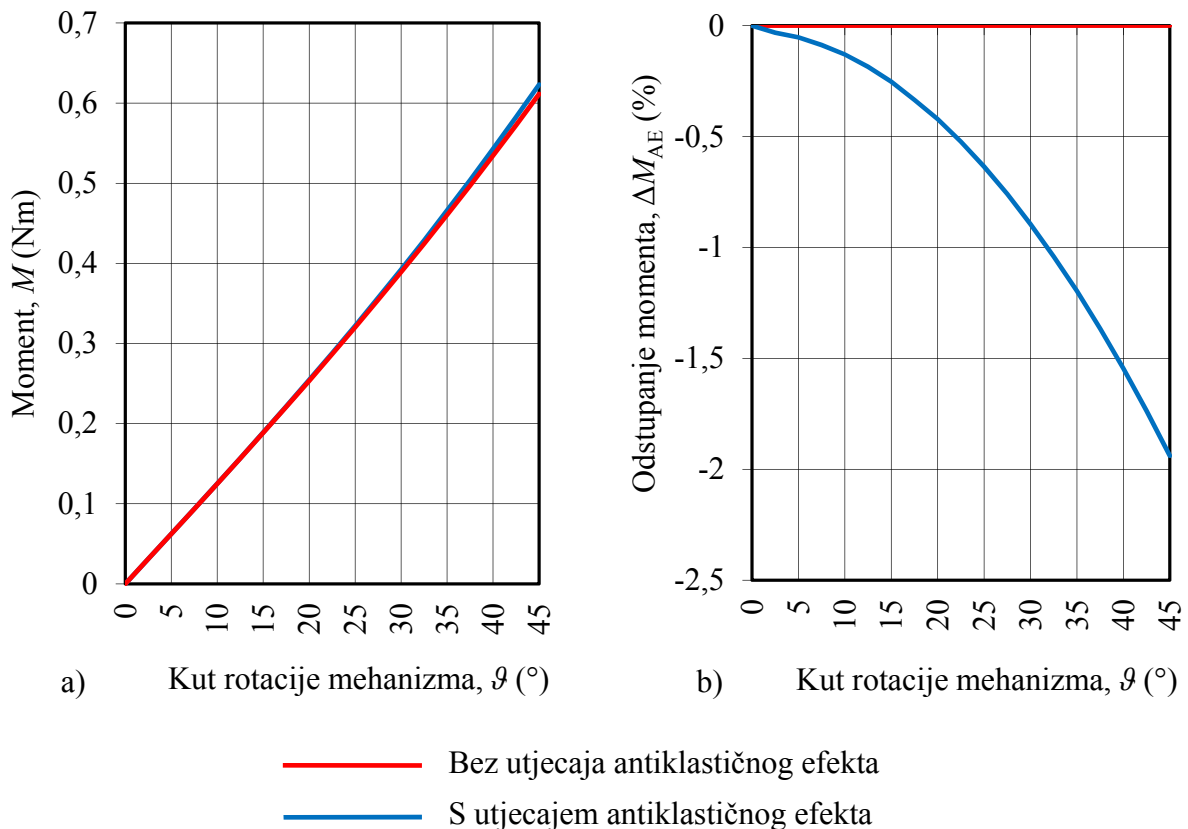
Kao je prethodno navedeno, tijekom proračuna potrebno je izvršiti kontrolu vrijednosti $b^2/(tr)$ kako bi se utvrdilo koliki je utjecaj antiklastičnog efekta pri kutovima rotacije od $0^\circ < \vartheta \leq 45^\circ$ modela analiziranog zgloba. Dobiveni rezultati promjene faktora Φ u ovisnosti o promjeni vrijednosti t/r za omjer $b/t = 30$ su u konkretnom slučaju prikazani na Slici 6.8.



Slika 6.8 Promjena faktora Φ u ovisnosti o omjeru t/r za $b/t = 30$

Najmanji polumjer zakrivljenosti elastične linije analiziranog modela iznosi $r_{\min} = 146,45$ mm pri kutu rotacije mehanizma od $\vartheta = 45^\circ$. Za polumjer zakrivljenosti r_{\min} omjer t/r iznosi $t/r_{\min} = 0,00341$ pa faktor Φ iznosi $\Phi = 1,01938$. Zaključuje se da je za najveći promatrani kut rotacije mehanizma potrebno korigirati modul elastičnosti za manje od 2 %. Smanjivanjem kuta rotacije, odnosno povećanjem polumjera zakrivljenosti elastične linije, odstupanje modula elastičnosti eksponencijalno pada te, primjerice, već za kut od $\vartheta = 30^\circ$ iznosi samo 0,89 %.

Odstupanje modula elastičnosti određuje se pomoću izraza (6.10). Na Slici 6.9a prikazan je moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma u ovisnosti o tom kutu, s utjecajem i bez utjecaja antiklastičnog efekta.



Slika 6.9 Promjena momenta s utjecajem i bez utjecaja antiklastičnog efekta a) u ovisnosti o kutu rotacije podatljivog mehanizma i b) odstupanje dobivenih vrijednosti

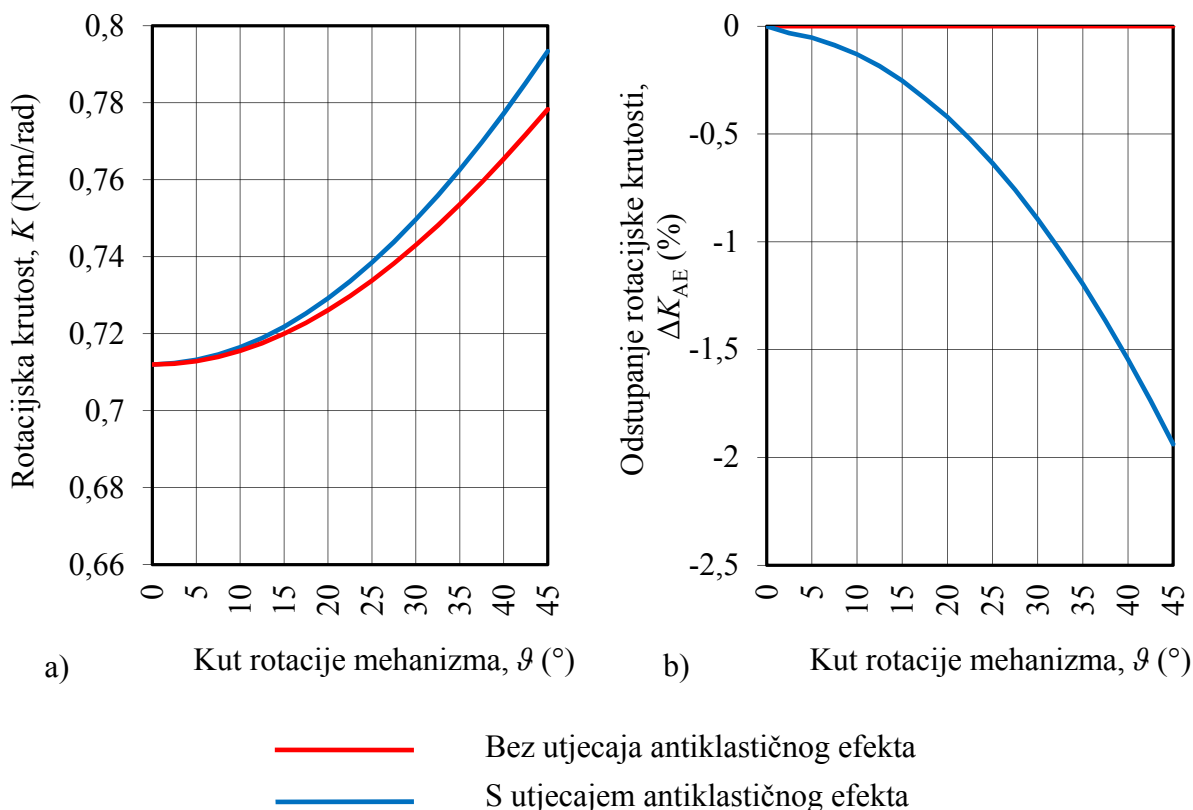
Preglednosti radi, na Slici 6.9b prikazano je i odstupanje dobivenih vrijednosti momenta s utjecajem antiklastičnog efekta u odnosu na vrijednosti bez tog utjecaja, izračunato primjenom izraza

$$\Delta M_{AE} = \frac{\Delta M}{M_{Bez\ AE}} = \frac{M_{Bez\ AE} - M_{AE}}{M_{Bez\ AE}} \cdot 100\% \quad (6.12)$$

Na Slici 6.9 vidljivo je da moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma gotovo linearno raste s porastom tog kuta, dok utjecaj antiklastičnog efekta eksponencijalno raste s porastom kuta rotacije mehanizma. S obzirom na rezultate vezane uz Sliku 6.8, za kut $\vartheta = 30^{\circ}$ i odstupanje momenta iznosi $\Delta M_{AE} = 0,895\%$, dok za kut $\vartheta = 45^{\circ}$ ono je $\Delta M_{AE} = 1,938\%$.

Zbog linearne ovisnosti momenta i rotacijske krutosti, odstupanja vrijednosti rotacijske krutosti s utjecajem i bez utjecaja antiklastičnog efekta, identična su odstupanjima momenta. Ovisnost rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma prikazana je na Slici 6.10a, a njezino odstupanje na Slici 6,10b te se može izračunati primjenom izraza

$$\Delta K_{AE} = \frac{\Delta K}{K_{Bez AE}} = \frac{K_{Bez AE} - K_{AE}}{K_{Bez AE}} \cdot 100\% \quad (6.13)$$



Slika 6.10 Promjena rotacijske krutosti s utjecajem i bez utjecaja antiklastičnog efekta a) u ovisnosti o kutu rotacije podatljivog mehanizma i b) odstupanje dobivenih vrijednosti rotacijske krutosti

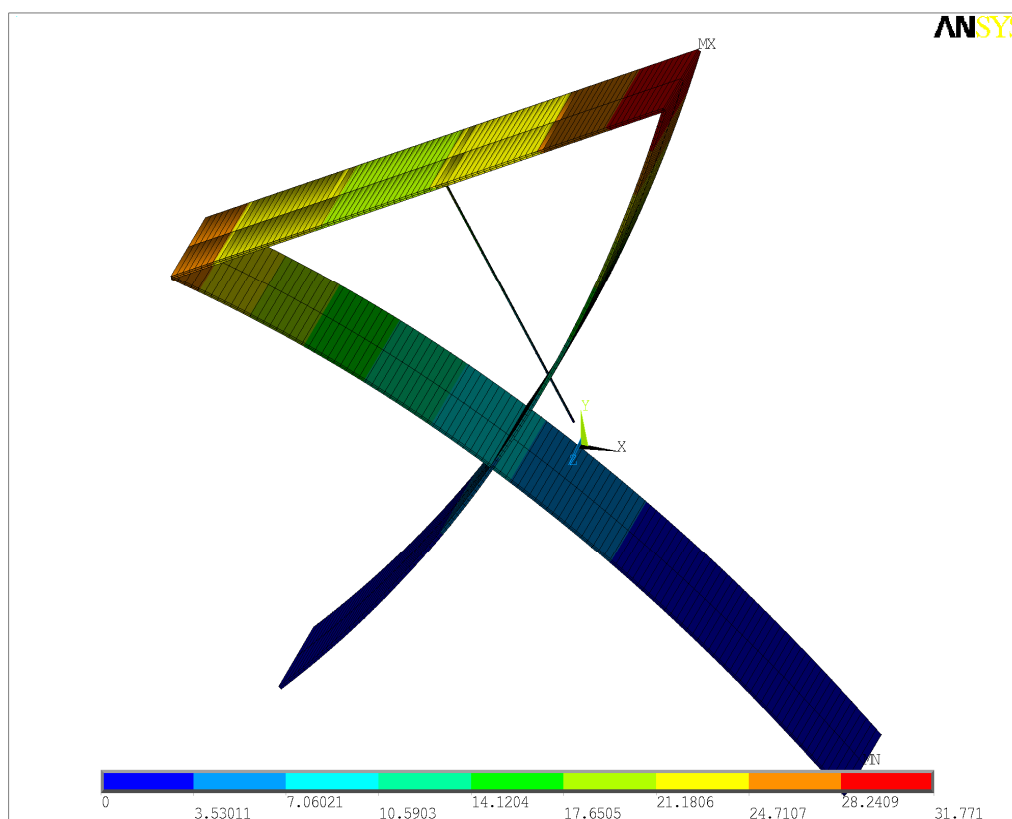
6.3.2 Parazitni pomaci

Veličina parazitnog pomaka se u rezultatima dobivenima metodom konačnih elemenata može očitati kao ukupan pomak čvora koji se prije rotacije zgloba nalazio u geometrijskom središtu mehanizma O , a nakon rotacije zgloba u točki O' (Slika 6.7). Faza parazitnog pomaka se temeljem očitanih pomaka točke O u smjeru osi x i pomaka u smjeru osi y računa prema izrazu (5.8).

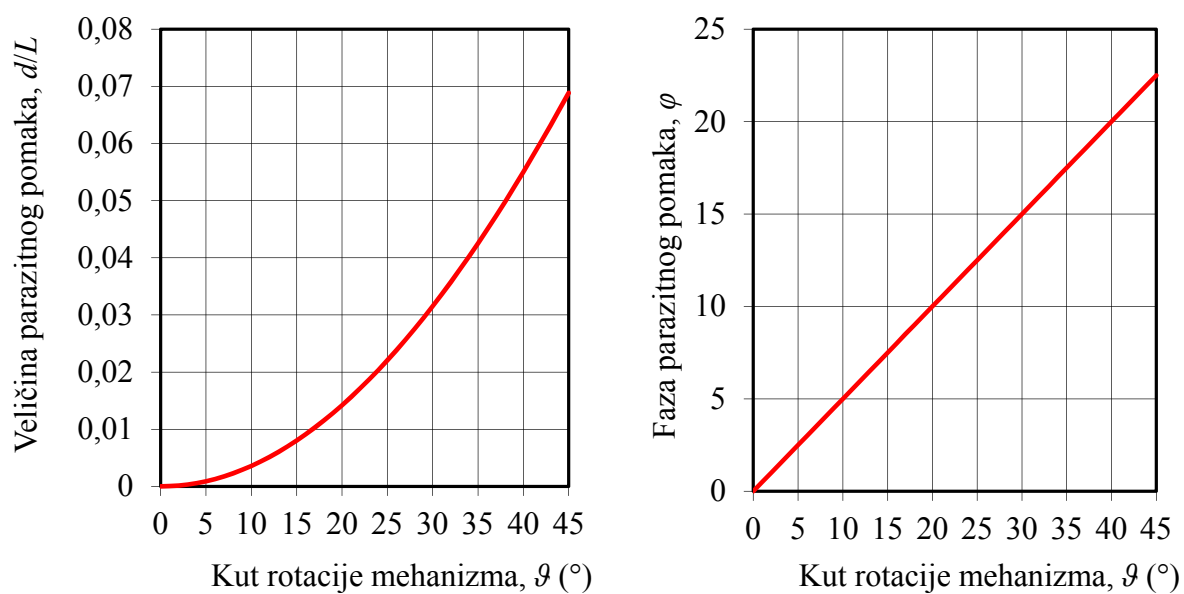
Utvrđeno je da iako antiklastični efekt utječe na vrijednost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma, on, naravno, ne utječe na vrijednost parazitnog pomaka.

Na Slici 6.11 dan je primjer prikaza ukupnih pomaka čvorova mreže analiziranog modela izraženih u milimetrima pri kutu rotacije mehanizma od 30° , dok su na Slici 6.12 prikazane promjene normalizirane veličine i faze parazitnog pomaka ovisne o kutu rotacije podatljivog

mehanizma.



Slika 6.11 Prikaz ukupnih pomaka čvorova mreže



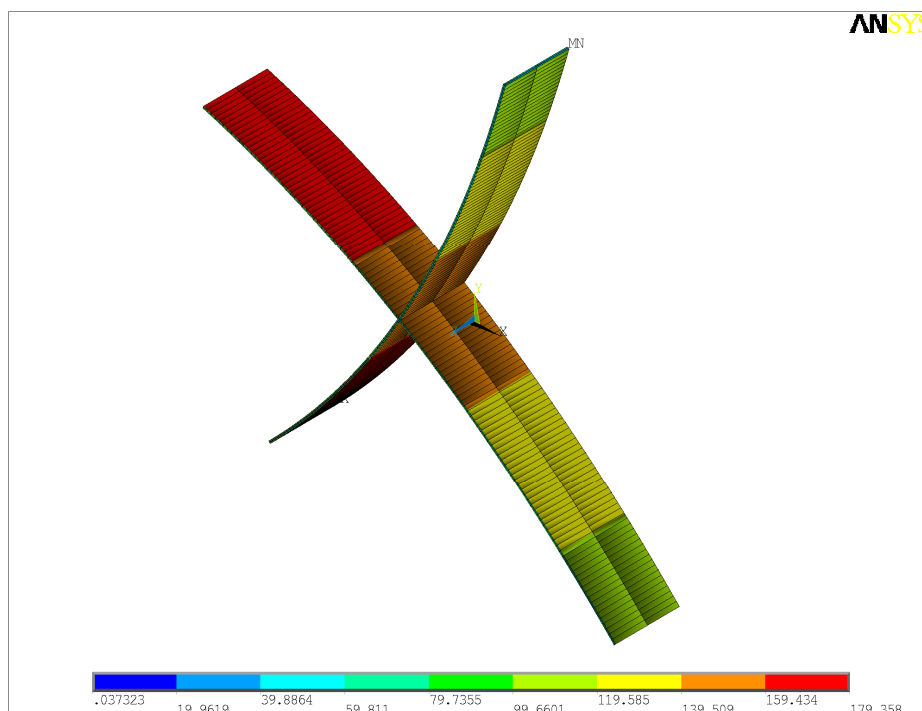
Slika 6.12 Normalizirana veličina te faza parazitnog pomaka u ovisnosti o kutu rotacije podatljivog mehanizma

Normalizirana veličina parazitnog pomaka eksponencijalno raste s porastom kuta rotacije mehanizma, dok je rast faze parazitnog pomaka linearan te faza parazitnog pomaka iznosi

polovicu vrijednosti kuta rotacije. Iz dijagrama je vidljivo da za kut rotacije mehanizma od $\vartheta = 45^\circ$ normalizirana veličina parazitnog pomaka iznosi $d/L = 0,06886$, dok faza parazitnog pomaka iznosi $\varphi = 22,5^\circ$.

6.3.3 Najveća naprezanja u lisnatim oprugama

Kao što je već ranije spomenuto, najveća se naprezanja javljaju u uklještenjima, odnosno na krajevima aktivnih duljina lisnatih opruga. Ekvivalentna naprezanja prema Von Misesu σ_e dobivena analizom metodom konačnih elemenata, očitavaju se u čvorovima ovisno o kutu rotacije podatljivog zgloba. Primjer prikaza dobivenih ekvivalentnih naprezanja izraženih u N/mm^2 za analizirani model pri kutu rotacije od $\vartheta = 30^\circ$ dan je na Slici 6.13, a radi bolje preglednosti iz prikaza je izostavljeno pomično kruto tijelo A. Vidljivo je tu da su najveća naprezanja puno manja od granice tečenja materijala od kojeg se uobičajeno izrađuju lisnate opruge za rotacijske podatljive mehanizme. U eksperimentima opisanima u radu [Zelenika, De Bona, 2002] lisnate su opruge izrađene od slitine bakra i berilija čija granica tečenja iznosi $R_{p0,2} = 1124 \text{ MPa}$.



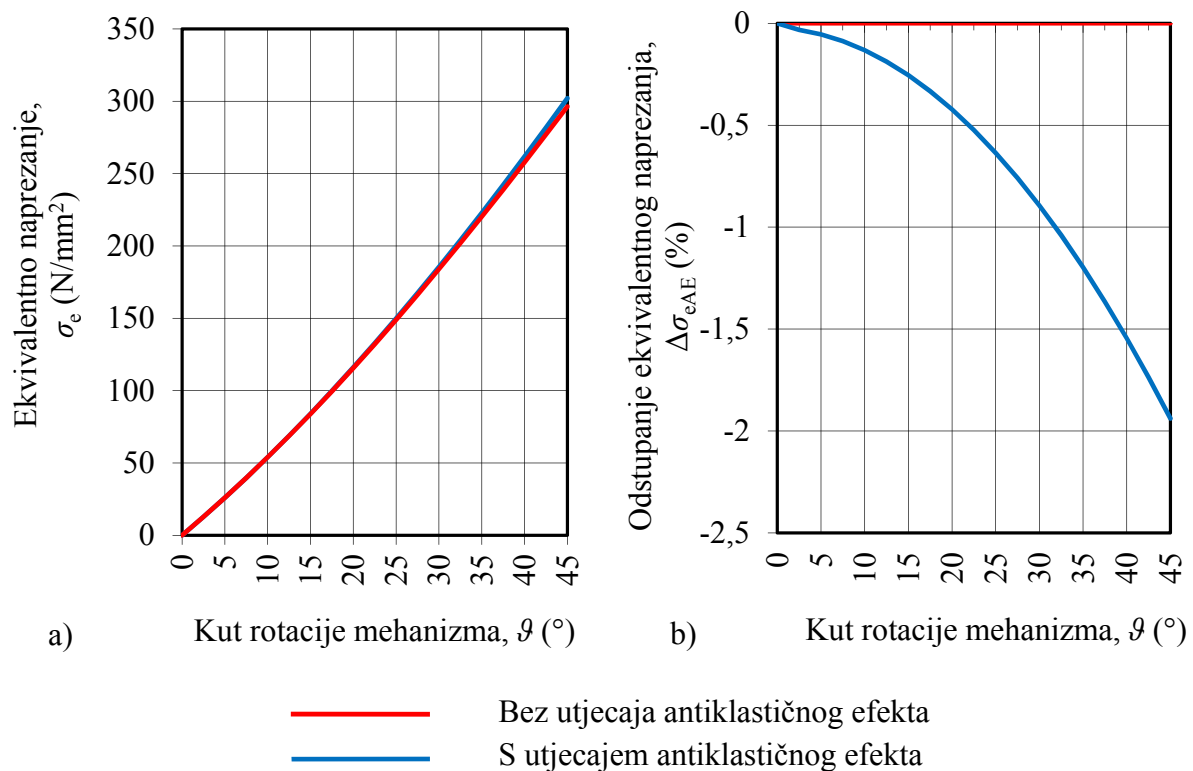
Slika 6.13 Prikaz dobivenih ekvivalentnih naprezanja σ_e prema Von Misesu u čvorovima rotacijskog podatljivog mehanizma

S obzirom da ekvivalentna naprezanja ovise o momentu savijanja koji djeluje u mjerodavnom presjeku lisnate opruge, jasno je da će antiklastični efekt utjecati i na ekvivalentna naprezanja.

Odstupanja vrijednosti ekvivalentnih napreznja s utjecajem antiklastičnog efekta i bez tog efekta izračunata su primjenom izraza

$$\Delta\sigma_{eAE} = \frac{\Delta\sigma_e}{\sigma_{e \text{ Bez AE}}} = \frac{\sigma_{e \text{ Bez AE}} - \sigma_{e \text{ AE}}}{\sigma_{e \text{ Bez AE}}} \cdot 100\% \quad (6.14)$$

Na Slici 6.14a prikazana su ekvivalentna napreznja sa i bez utjecaja antiklastičnog efekta, a njihova odstupanja na Slici 6,14b.



Slika 6.14 Promjena ekvivalentnog napreznja s utjecajem i bez utjecaja antiklastičnog efekta a) u ovisnosti o kutu rotacije podatljivog mehanizma i b) odstupanje dobivenih vrijednosti

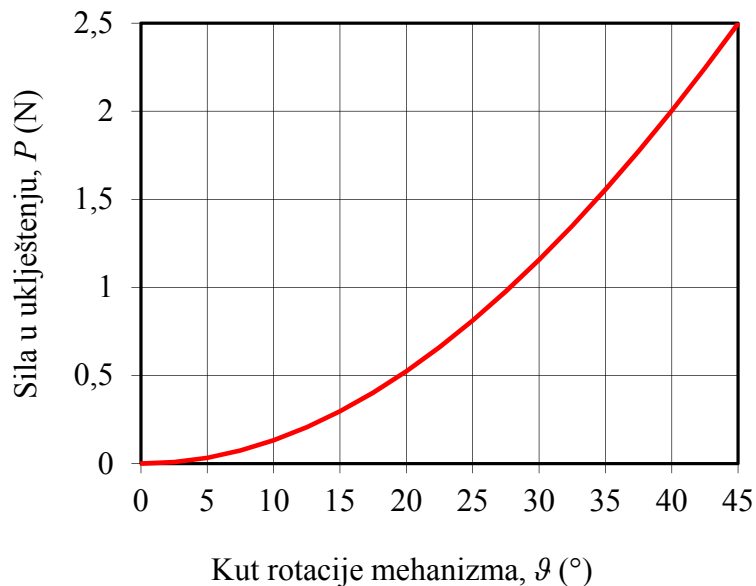
Ekvivalentno napreznje gotovo je linearno ovisno o kutu rotacije mehanizma, dok odstupanje vrijednosti ekvivalentnih napreznja eksponencijalno raste s rastom kuta rotacije mehanizma. Za kut rotacije mehanizma $\vartheta = 45^\circ$ odstupanje iznosi $\Delta\sigma_{eAE} = 1,934\%$

6.3.4 Stabilnost mehanizma

Iz Slike 6.9 i Slike 6.10 vidljivo je, da su u cijelom promatranom rasponu kutova rotacije analiziranog rotacijskog podatljivog mehanizma, vrijednosti momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma i rotacijske krutosti pozitivne ako je podatljivi

mehanizam opterećen samo momentom. Reakcijske sile u uklještenjima su male i ne dovode do nestabilnosti mehanizma u analiziranom području.

Na Slici 6.15 prikazane su očitane vrijednosti reakcijskih sila P ovisne o promjeni kuta rotacije mehanizma.



Slika 6.15 Ovisnost sile u uklještenju o kutu rotacije podatljivog mehanizma

Vidljivo je da sila u uklještenju eksponencijalno raste s rastom kuta rotacije mehanizma pa tako za kut od $\vartheta = 45^{\circ}$ ona iznosi $P = 2,497$ N. Sile u uklještenju su male zbog čega nije bilo potrebno prikazivati utjecaj antiklastičnog efekta. Za kut rotacije $\vartheta = 45^{\circ}$ odstupanje vrijednosti sile P još jednom iznosi 1,938 %.

6.4 Provjera valjanosti i točnosti predloženog postupka numeričke analize

S ciljem provjere valjanosti i točnosti metode konačnih elemenata kao pogodnog alata za proračun rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama, rezultati dobiveni predloženim postupkom numeričke analize uspoređeni su s rezultatima eksperimentalnih mjerenja dostupnima u literaturi. Analiza metodom konačnih elemenata u nastavku doktorske disertacije proširena je i na još neka konstrukcijska rješenja razmatranih rotacijskih podatljivih mehanizama.

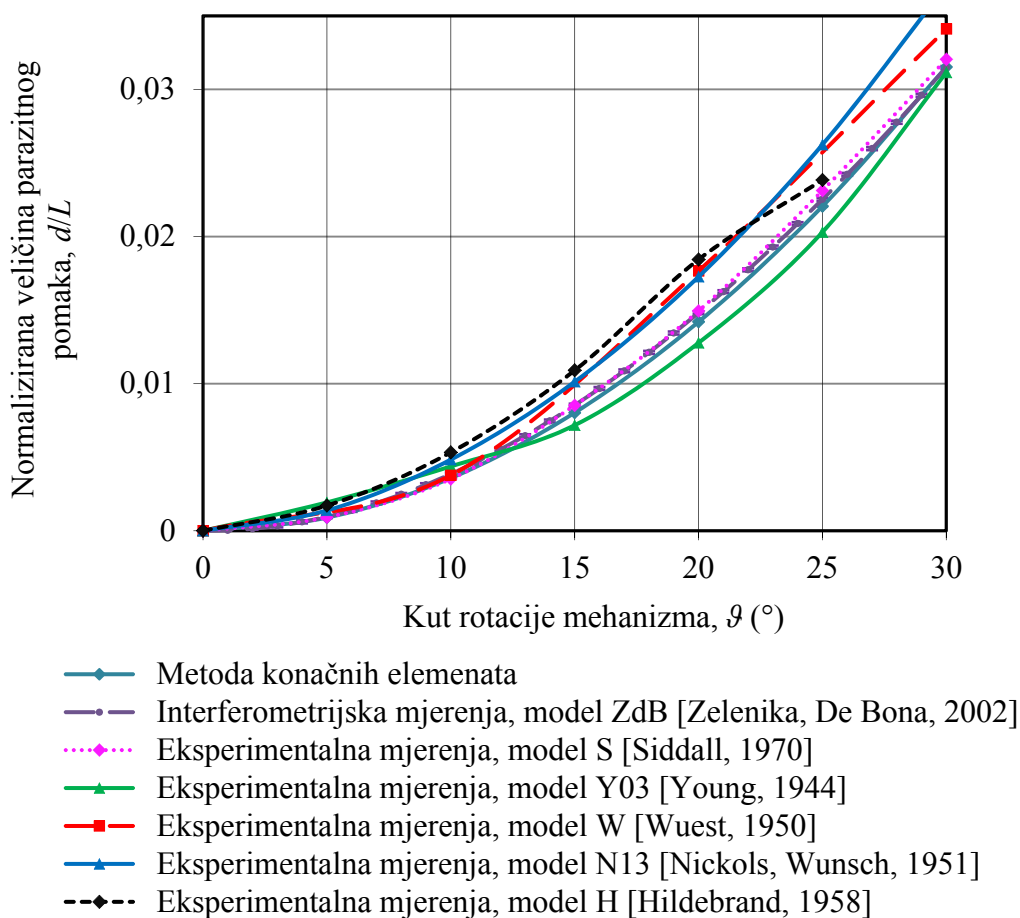
Za analizu i prikaz dobivenih rezultata odabrano je sljedećih šest modela rotacijskih podatljivih mehanizama:

- model s oznakom Y03 [Young, 1944] i karakteristikama navedenim u Tablici 5.1,
- model s oznakom N13 [Nickols, Wunsch, 1951] i karakteristikama navedenim u Tablici 5.2,
- model s oznakom ZdB [Zelenika, De Bona, 2002] i karakteristikama navedenim u Tablici 5.4.
- model s oznakom S [Siddall, 1970] i karakteristikama navedenim u Tablici 5.5
- model s oznakom H [Hildebrandt, 1958] i karakteristikama navedenim u Tablici 5.5
- model s oznakom W [Wuest, 1950] i karakteristikama navedenim u Tablici 5.5

Pri analizi metodom konačnih elemenata uzet je u obzir i utjecaj antiklastičnog efekta.

6.4.1 Analiza parazitnog pomaka

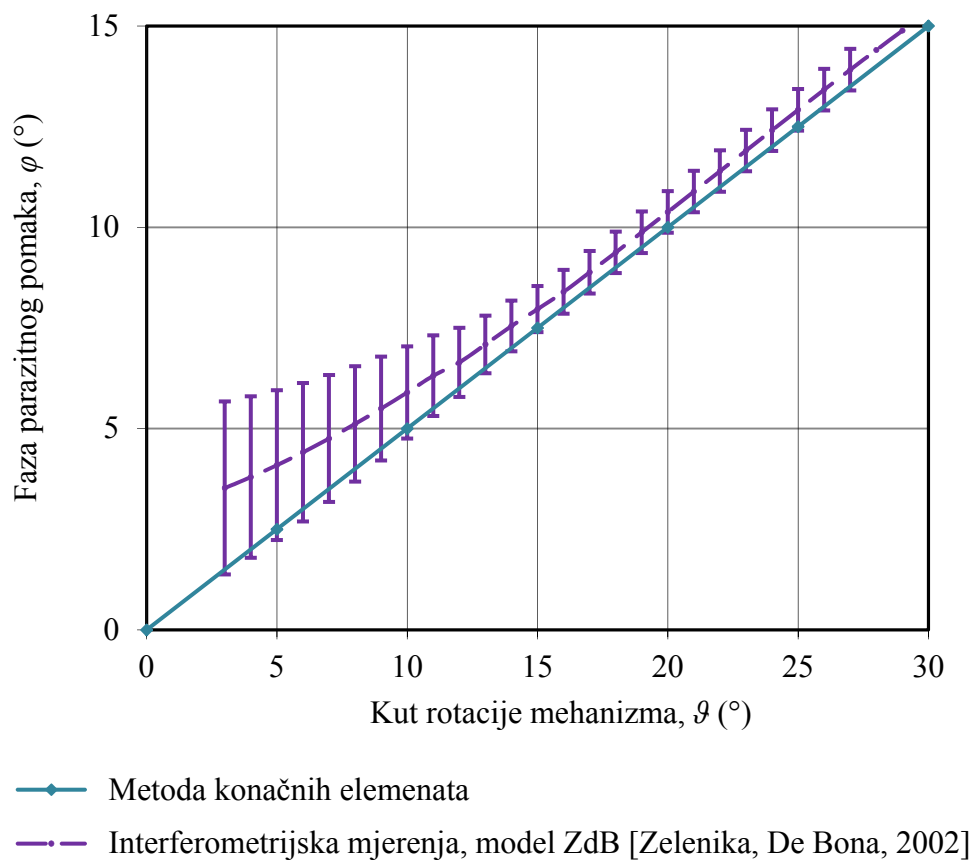
Za usporedbu rezultata dobivenih za normaliziranu veličinu parazitnih pomaka numeričkom analizom i eksperimentalnim mjerenjima dostupnima u literaturi, odabrani su prethodno spomenuti modeli te su dobiveni rezultati prikazani na Slici 6.16.



Slika 6.16 Usporedba rezultata eksperimentalnih mjerenja dostupnih u literaturi i analize metodom konačnih elemenata za normaliziranu veličinu parazitnog pomaka

Očekivano, najbolje poklapanje rezultata ostvareno je za interferometrijska mjerenja oznake ZdB (Tablica 5.4) i rezultate analize metodom konačnih elemenata. Doista, kao što je ranije spomenuto, u odnosu na ostala eksperimentalna mjerenja opisana u doktorskoj disertaciji, interferometrijsko mjerenje provedeno je sa suvremenijom, točnijom i preciznijom opremom. Na cijelom razmatranom području rotacije mehanizma odstupanja rezultata eksperimentalnih mjerenja i analize metodom konačnih elemenata za model ZdB iznose manje od 2 %. Kao što je ranije rečeno, preostale pogreške uglavnom su uzrokovane sustavnim pogreškama (npr. pogreške pri montaži i dr.), utjecajem okoline itd. [Zelenika, De Bona, 2002]. Slična odstupanja rezultata eksperimentalnih mjerenja od metode konačnih elemenata dobivena su i eksperimentalnim mjerenjima opisanima u referenci [Siddall, 1970], iako je razlučivost i ponovljivost korištene metode slabija jer je za razliku od interferometrijskih mjerenja ta metoda kontaktna.

Na Slici 6.17 prikazana je usporedba rezultata interferometrijskih mjerenja i analize metodom konačnih elemenata provedenih na modelu s oznakom ZdB (Tablica 5.4) za fazu parazitnog pomaka.

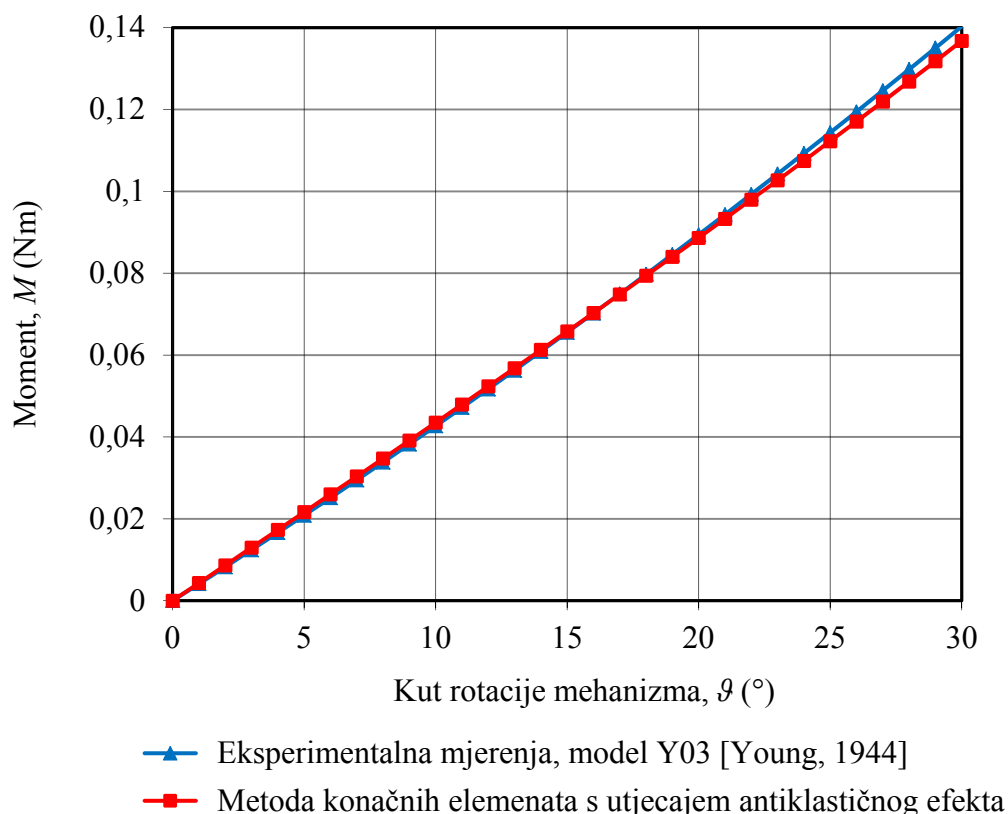


Slika 6.17 Usporedba rezultata interferometrijskih mjerenja i analize metodom konačnih elemenata za fazu parazitnog pomaka modela ZdB (Tablica 5.4)

Iznosi pogrešaka interferometrijskih mjerenja [Zelenika, De Bona, 2002] opadaju s rastom kuta rotacije mehanizma, pa pri kutu od $\vartheta = 3^\circ$ odstupanje iznosi $\Delta\varphi = \pm 2,72^\circ$, a pri kutu rotacije $\vartheta = 30^\circ$ ono iznosi $\Delta\varphi = \pm 0,51^\circ$. U cijelom rasponu mjerenja su u svakom slučaju rezultati analize metodom konačnih elemenata u području nepouzdanosti samih interferometrijskih mjerenja.

6.4.2 Analiza momenta i rotacijske krutosti mehanizma

U ovom je slučaju, s obzirom na dostupne rezultate, analiziran rotacijski podatljivi mehanizam s karakteristikama jednakim onome mehanizma Y03 iz Tablice 5.1. Na Slici 6.18 prikazane su vrijednosti momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ u ovisnost o tom kutu dobivene eksperimentalnim mjerenjima [Young, 1944] i analizom metodom konačnih elemenata. Kao što je ranije rečeno, pri analizi metodom konačnih elemenata uzet je u obzir i utjecaj antiklastičnog efekta.



Slika 6.18 Usporedba rezultata eksperimentalnih mjerenja i analize metodom konačnih elemenata za moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma modela Y03 (Tablica 5.1)

U cijelom području rotacije mehanizma uočava se vrlo dobro poklapanje vrijednosti

dobivenih eksperimentom i rezultata analize metodom konačnih elemenata s utjecajem antiklastičnog efekta. Odstupanja analize metodom konačnih elemenata su u cijelom području rotacije mehanizma manja od 2,5 %. S obzirom da je rotacijska krutost mehanizma prema izrazu $K = M/g$ linearno ovisna o momentu, odstupanja vrijednosti dobivenih za moment su identična odstupanjima rotacijske krutosti mehanizma.

Na osnovu usporedbe eksperimentalnih mjerenja i rezultata analize metodom konačnih elemenata za parazitne pomake, moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma i rotacijsku krutost mehanizma zaključuje se stoga da je predloženi numerički model pogodan alat za analizu ponašanja razmatranih mehanizama.

U ovom je poglavlju doktorske disertacije opisan numerički model simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma metodom konačnih elemenata. Rezultati dobiveni metodom konačnih elemenata uspoređeni su s rezultatima eksperimentalnih mjerenja dostupnima u literaturi i ostvarena su vrlo dobra poklapanja rezultata. Na taj je način potvrđena primjenjivost metode konačnih elemenata i na analizu ponašanja razmatrane klase mehanizama i kod velikih kutova rotacije, što stvara pretpostavke za uporabu te metode pri analizi utjecaja konstrukcijskih parametara i opterećenja mehanizma, što bi bilo vrlo komplicirano, a u nekim slučajevima i gotovo nemoguće izračunati nekom analitičnom metodom. Računski je posebice zahtjevna *Elastica* metoda koja uključuje iterativni proračun s izračunom eliptičnih integrala u svakom koraku proračuna. U nastavku rada će se stoga upravo metoda konačnih elemenata koristiti za analizu utjecaja konstrukcijskih parametara na ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama. S ciljem utvrđivanja granica njihove primjenjivosti u ovisnosti o zahtijevanom stupnju točnosti, rezultati analize metodom konačnih elemenata usporedit će se s rezultatima dobivenima uporabom analitičkih metoda proračuna ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama navedenih u 3. i 4. poglavlju disertacije.

7 Usporedba dobivenih rezultata

U prethodnim su cjelinama opisani analitički modeli i model razvijen primjenom metode konačnih elemenata koji se primjenjuju za modeliranje ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama, kao i rezultati eksperimentalnih mjerenja dostupni u literaturi. Usporedbom eksperimentalnih mjerenja dostupnih u literaturi i rezultata analize metodom konačnih elemenata potvrđena je valjanost i točnost predloženog numeričkog modela kao pogodnog alata za analizu ponašanja tretiranih mehanizama u praksi. Usporedbom rezultata dobivenih svim prethodno spomenutim metodama, uključujući i u radu razvijen analitički proračun koji primjenjuje *Elastica* metodu za rješavanje rotacijskih podatljivih mehanizama kada su opruge u polju geometrijski nelinearnih deformacija, u ovom poglavlju doktorske disertacije žele se naglasiti njihove prednosti i eventualni nedostaci, te utvrditi granice primjenjivosti, posebice približnih analitičkih metoda, u ovisnosti o traženom stupnju točnosti proračuna.

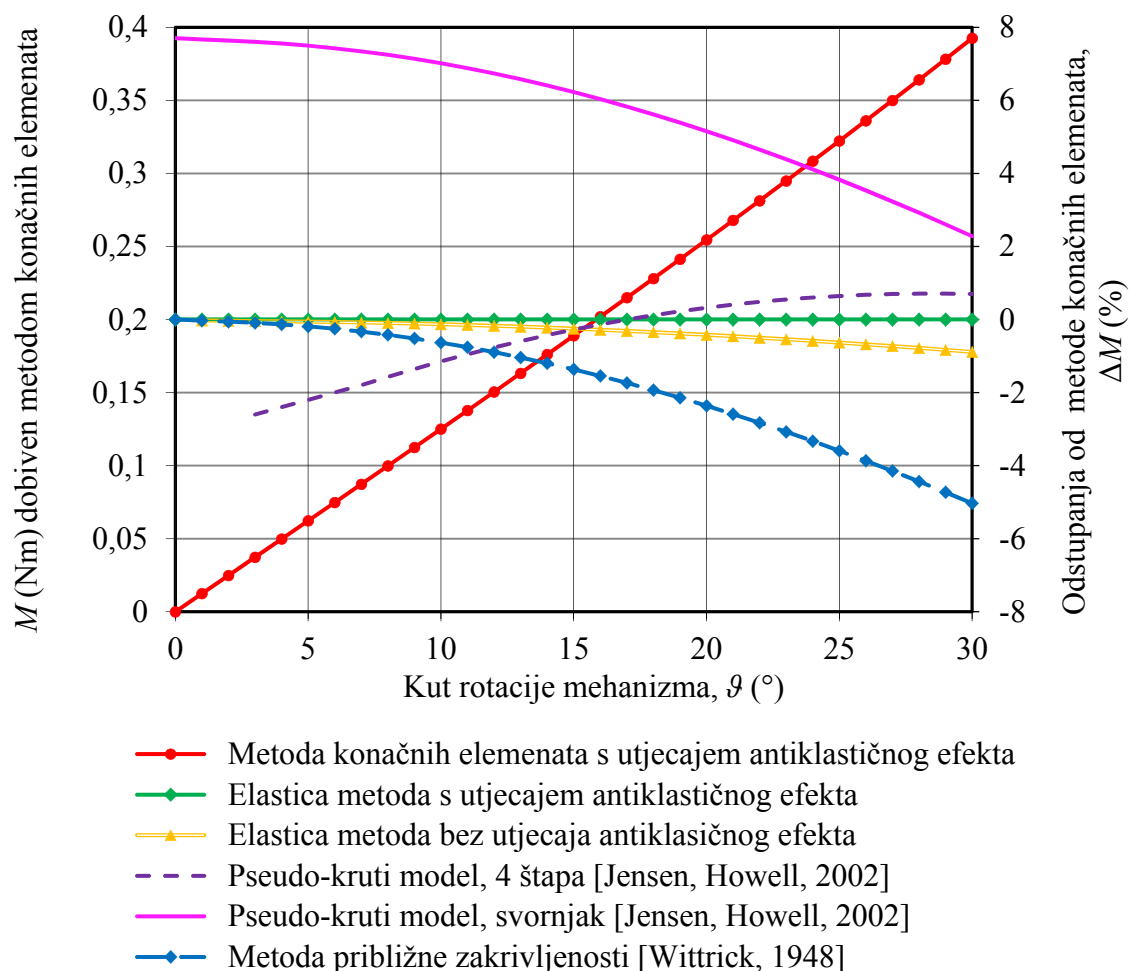
Za analizu i prikaz dobivenih rezultata odabran je rotacijski podatljivi mehanizam i to onaj s oznakom ZdB [Zelenika, De Bona, 2002], čije su karakteristike navedene u Tablici 5.4. Za taj je mehanizam napravljena usporedba:

- metode konačnih elemenata opisane u 6. poglavlju, pritom uzimajući u obzir utjecaj antiklastičnog efekta opisanog u poglavlju 6.2.1,
- *Elastica* metode opisane u 3. poglavlju disertacije, pritom uzimajući u obzir utjecaj antiklastičnog efekta,
- metode približne zakrivljenosti prema Wittricku [Wittrick, 1948],
- kinematičkog modela prema Wuestu [Wuest, 1950],

- metode pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom prema Howellu [Jensen, Howell, 2002],
- metode pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema Howellu [Jensen, Howell, 2002],
- metode pseudo–krutog modela prema Peiu [Pei et al., 2009],
- geometrijske metode zglobnog četverokuta opisane u poglavlju 4.3, te
- geometrijske metode prema Troegeru [Troeger, 1962].

7.1 Izračun momenta i rotacijske krutosti

Na Slici 7.1 prikazane su vrijednosti momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ dobivene metodom konačnih elemenata.



Slika 7.1 Moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije ϑ dobiven numeričkom analizom i odstupanja od te vrijednosti dobivena analitičkim metodama u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma za mehanizam s oznakom ZdB i karakteristikama iz Tablice 5.4

Na istom su dijagramu prikazana i odstupanja rezultata dobivenih drugim prethodno spomenutim metodama u odnosu na rezultate numeričke analize.

Za sve metode upotrijebljen je isti izraz za izračun odstupanja momenta koji glasi

$$\Delta M = \frac{\Delta M}{M_{\text{MKE}}} = \frac{M_{\text{Usporedba}} - M_{\text{MKE}}}{M_{\text{MKE}}} \cdot 100\% \quad (7.1)$$

S obzirom da vrijedi izraz $K = M/\vartheta$, odstupanje rotacijske krutosti ΔK identično je odstupanju momenta ΔM pa će vrijediti $\Delta K = \Delta M$ (Slika 7.1).

U cijelom području ispitanih kutova rotacije mehanizma uočava se izvrsno poklapanje vrijednosti dobivenih *Elastica* metodom i rezultata dobivenih analizom metodom konačnih elemenata ako se objema metodama uzme u obzir utjecaj antiklastičnog efekta. U slučaju kada se *Elastica* metodom ne uzme u obzir utjecaj antiklastične zakrivljenosti, rezultati proračuna s porastom kuta rotacije mehanizma ϑ sve više odstupaju od rezultata dobivenih metodom konačnih elemenata, pa pri kutu od $\vartheta = 30^\circ$ odstupanje u odnosu na rezultate analize metodom konačnih elemenata iznosi $\Delta M = 1,01\%$. Kao što je ranije rečeno, u poglavlju 6., kod analiziranog slučaja ZdB (Tablica 5.4) utjecaj antiklastičnog efekta nije značajan. Vrijednosti izračunate metodom približne zakrivljenosti prema Wittricku, kojom se u izrazu za elastičnu liniju zanemaruje mala veličina $(dy/dx)^2$, odstupaju od metode konačnih elemenata sve više s porastom kuta rotacije mehanizma pa pri kutu $\vartheta = 30^\circ$ razlika iznosi $\Delta M = -5,03\%$. Za razliku od metode približne zakrivljenosti, odstupanja dobivena metodama pseudo–krutog modela tijela se s rastom kuta rotacije smanjuju. Krivulja odstupanja pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema Howellu siječe os apscise pri vrijednosti kuta rotacije od $\vartheta = 17^\circ$, što znači da za taj kut nema odstupanja od metode konačnih elemenata. Kinematički model prema Wuestu, geometrijska metoda zglobnog četverokuta opisana u poglavlju 4.3 te geometrijska metoda prema Troegeru, kao što je ranije rečeno, omogućuju samo izračun parazitnih pomaka, a ne rotacijske krutosti mehanizma. Metodom pseudo–krutog modela prema Peiu rotacijska krutost mehanizma definira se identično rotacijskoj krutosti pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom pa na Slici 7.1 nije posebno prikazana.

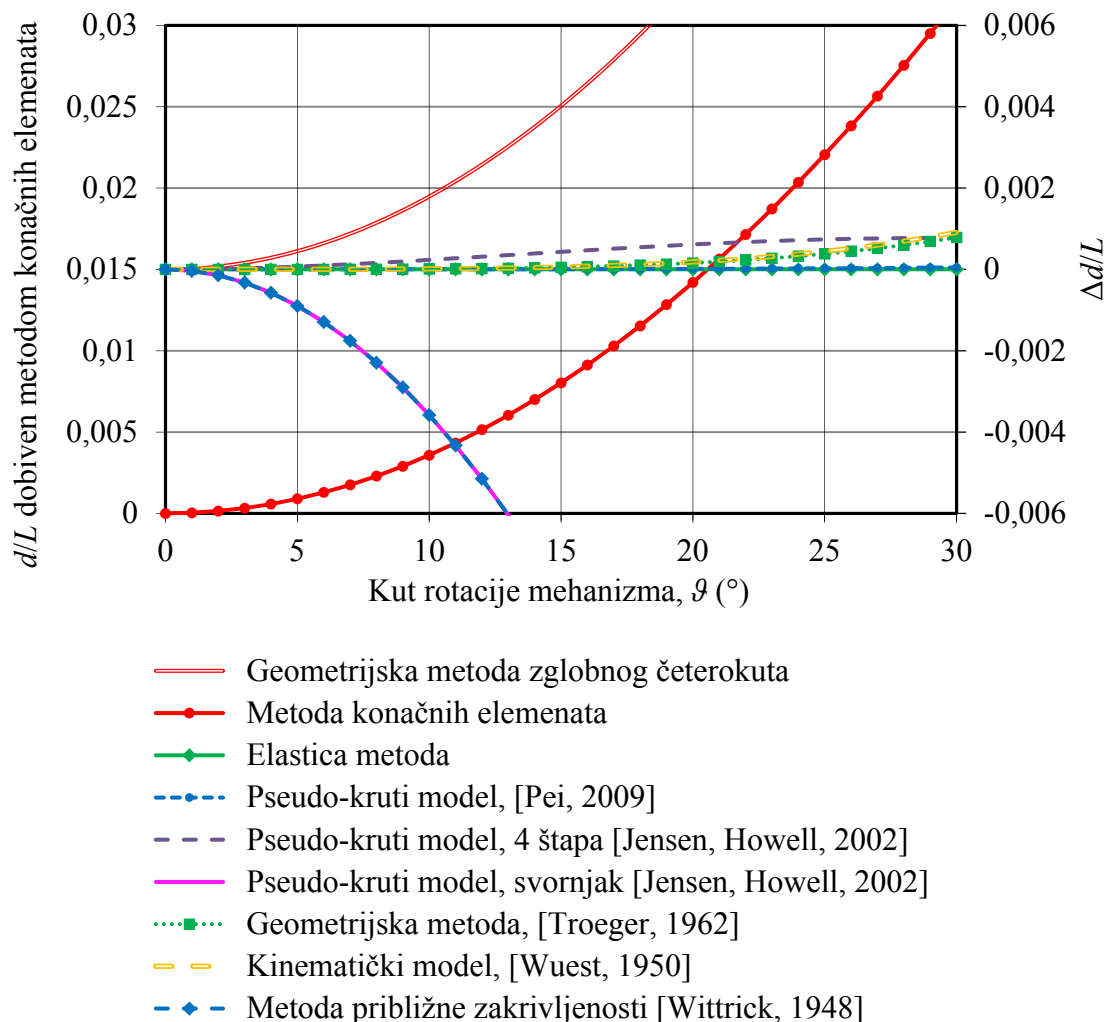
Analizom metodom konačnih elemenata i *Elastica* metodom moguće je izračunati i vrijednosti momenata u uklještenjima M_0 i M_L . Provedena je i takva analiza i ustanovljeno je izvrsno poklapanje rezultata u cijelom analiziranom području ($0^\circ < \vartheta \leq 30^\circ$) pa nije dan prikaz dobivenih rezultata.

7.2 Izračun parazitnog pomaka

Jedan od vrlo važnih čimbenika kojime se ocjenjuje ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama u primjeni je parazitni pomak mehanizma, jer se prema njemu ocjenjuje geometrijska točnost i preciznost analiziranih mehanizama. Stoga je izuzetno važno da parazitni pomak bude čim preciznije izračunat.

7.2.1 Normalizirana veličina parazitnog pomaka

Vrijednosti normalizirane veličine parazitnog pomaka d/L dobivene metodom konačnih elemenata prikazane su na Slici 7.2, gdje su dana i odstupanja vrijednosti dobivenih različitim analitičkim metodama izračuna od metode konačnih elemenata.



Slika 7.2 Normalizirana veličina parazitnog pomaka dobivena numeričkom analizom i odstupanja od te vrijednosti dobivena analitičkim metodama ovisna o kutu rotacije mehanizma za mehanizam s oznakom ZdB i karakteristikama iz Tablice 5.4

Odstupanja normalizirane veličine parazitnog pomaka izračunata su uporabom izraza

$$\frac{\Delta d}{L} = \frac{d_{\text{Usporedba}} - d_{\text{MKE}}}{L} \quad (7.2)$$

Vrijednosti dobivene metodom konačnih elemenata i *Elastica* metodom izvrsno se poklapaju, u cijelom promatranom području kutova rotacije zanemariva su i odstupanja vrijednosti dobivenih metodom pseudo–krutog modela prema Peiu. I primjena geometrijske metode prema Troegeru dala je zadovoljavajuću podudarnost jer, iako ta odstupanja od metode konačnih elemenata eksponencijalno rastu, čak i pri kutu rotacije od $\vartheta = 30^\circ$ ona iznose samo $\Delta d/L = 0,00079$. Nešto su veća odstupanja dobivena kinematičkim modelom prema Wuestu. I tu odstupanja eksponencijalno rastu s porastom kuta pa tako pri kutu $\vartheta = 30^\circ$ ono iznosi $\Delta d/L = 0,00091$. Rezultati dobiveni metodom pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema Howellu pokazuju rast odstupanja od metode konačnih elemenata s porastom kuta rotacije mehanizma. Uočljivo je da se pri kutovima $\vartheta \geq 25^\circ$ odstupanja rezultata od te metode ne povećavaju, pa su tako za $\vartheta \geq 28^\circ$ rezultati točniji nego li rezultati dobiveni kinematičkim modelom prema Wuestu. Očekivano, najveća odstupanja normalizirane veličine parazitnog pomaka dobivena su primjenom geometrijske metode zglobnog četverokuta iz poglavlja 4.3 kojom se ne uzima u obzir savijanje lisnatih opruga, a odstupanja rezultata eksponencijalno rastu s rastom kuta rotacije.

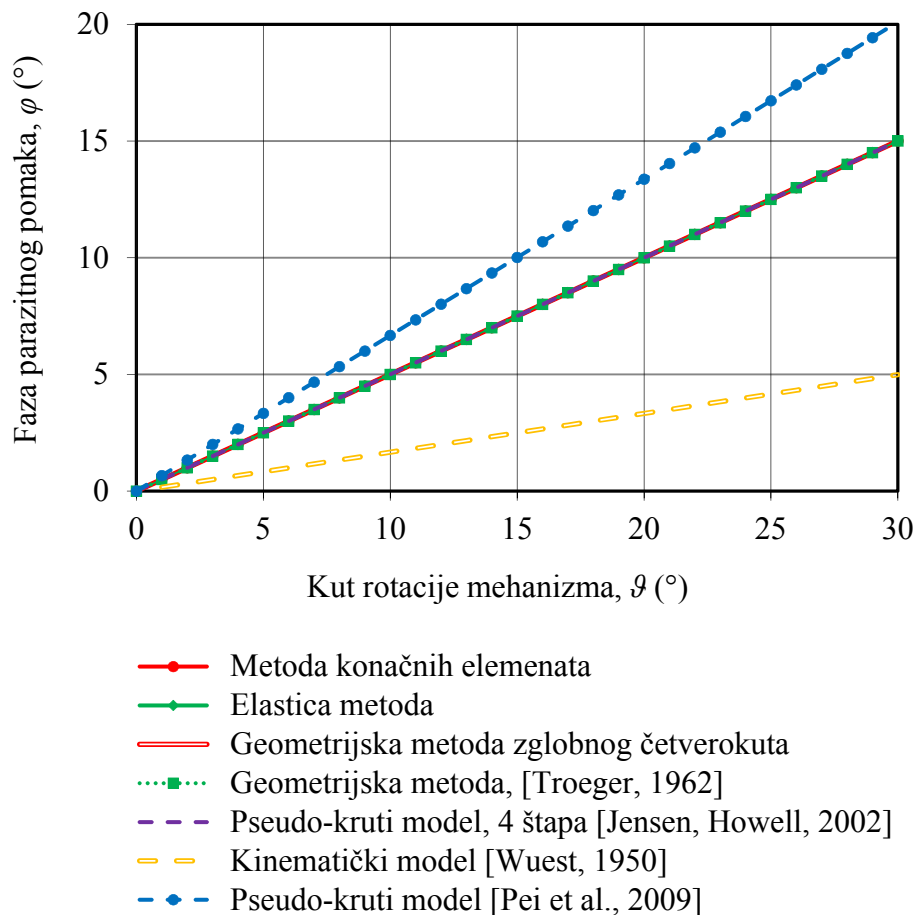
Nadalje, treba spomenuti da se metodom približne zakrivljenosti prema Wittricku i metodom pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom prema Howellu pretpostavlja da je parazitni pomak $d = 0$, ali uvidom u dobivene rezultate za spomenute pristupe prikazane na Slici 7.2 uočava se da je pretpostavka kriva, jer je već pri kutu rotacije od $\vartheta = 7^\circ$ odstupanje vrijednosti veće nego kod svih drugih primijenjenih metoda izračuna, izuzev geometrijske metode zglobnog četverokuta.

7.2.2 Faza parazitnog pomaka

Vrijednosti za fazu parazitnog pomaka φ dobivene različitim analitičkim metodama i metodom konačnih elemenata prikazane su na Slici 7.3.

Vrijednosti faze parazitnog pomaka dobivene metodom konačnih elemenata, *Elastica* metodom, geometrijskom metodom zglobnog četverokuta, metodom pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema Howellu i geometrijskom metodom prema Troegeru su identične. Za sve spomenute metode faza parazitnog pomaka raste linearno s porastom kuta

rotacije podatljivog mehanizma te je po vrijednosti faza jednaka polovici kuta rotacije pa kod kuta rotacije $\vartheta = 30^\circ$ iznosi $\varphi = 15^\circ$.



Slika 7.3 Faza parazitnog pomaka dobivena metodom konačnih elemenata i različitim analitičkim metodama ovisna o kutu rotacije podatljivog mehanizma za mehanizam s oznakom ZdB i karakteristikama iz Tablice 5.4

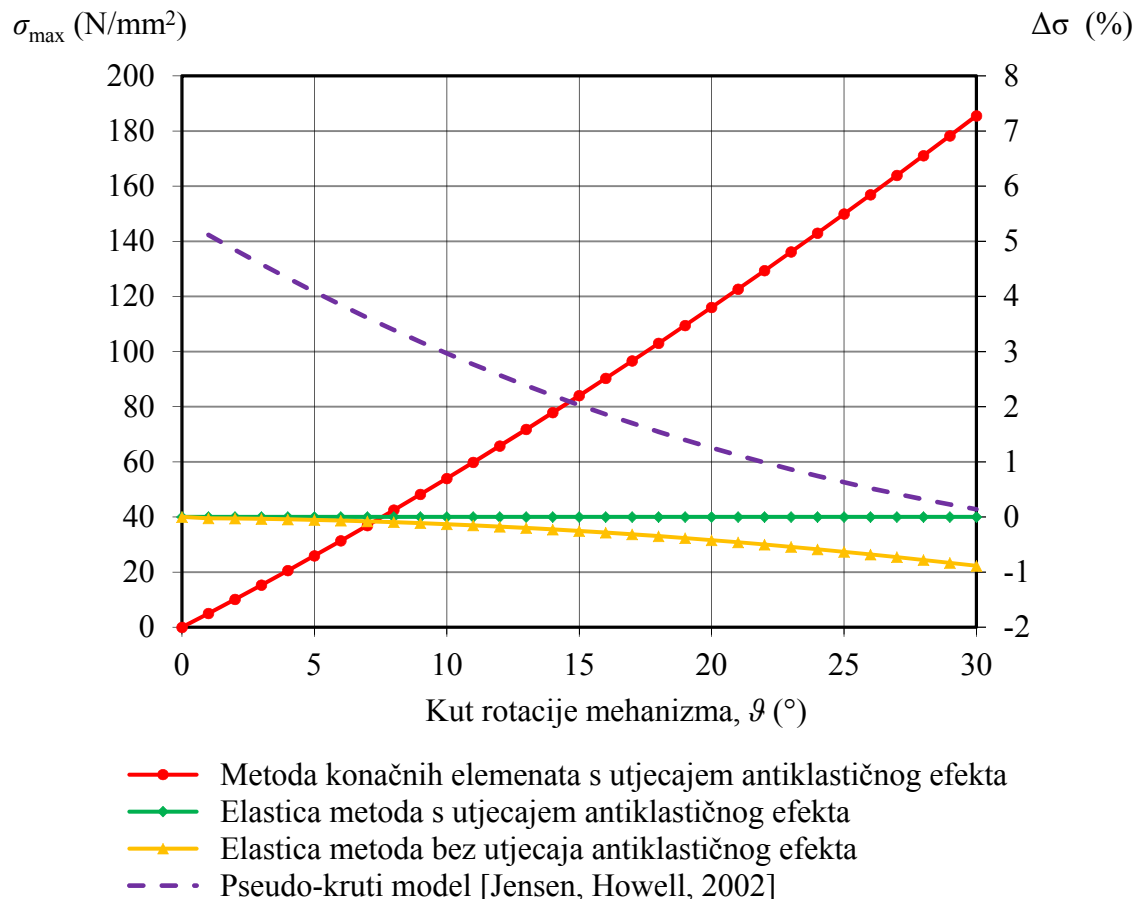
Kinematički model prema Wuestu, u odnosu na metodu konačnih elemenata daje manja odstupanja rezultata od pseudo–krutog modela prema Peiu, ali su odstupanja rezultata obaju modela velika.

7.3 Izračun naprezanja

Kako je već višekratno istaknuto, najveće naprezanje javlja se u uklještenjima i ono ovisi o vrijednosti momenta savijanja M_0 (cf. Sliku 3.8). Na Slici 7.4 prikazane su vrijednosti najvećih naprezanja dobivene metodom konačnih elemenata, kao i odstupanja dobivenih naprezanja različitim analitičkim metodama u odnosu na tu vrijednost. Analiza je provedena za mehanizam s karakteristikama ZdB iz Tablice 5.4.

Odstupanje napreznja izračunato je uporabom izraza

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_{\max}}{\sigma_{\max,\text{MKE}}} = \frac{\sigma_{\max,\text{Usporedba}} - \sigma_{\max,\text{MKE}}}{\sigma_{\max,\text{MKE}}} \cdot 100\% \quad (7.3)$$



Slika 7.4 Najveće napreznje dobiveno numeričkom analizom i odstupanja od te vrijednosti dobivena analitičkim metodama ovisna o kutu rotacije mehanizma za mehanizam s oznakom ZdB i karakteristikama iz Tablice 5.4

Najveće napreznje koje se javlja u uklještenju lisnatih opruga rotacijskog mehanizma raste s povećanjem kuta rotacije mehanizma i pri kutu od $\vartheta = 30^\circ$ ono iznosi $\sigma_{\max,\text{MKE}} = 183,9 \text{ N/mm}^2$ što je puno manje od granice tečenja materijala od kojeg se uobičajeno lisnate opruge za rotacijske podatljive mehanizme izrađuju (vidjeti gore). Ako se uzme u obzir utjecaj antiklastičnog efekta, rezultati analize metodom konačnih elemenata i vrijednosti izračunate primjenom *Elastica* metode se podudaraju u analiziranom području ($0 < \vartheta \leq 30^\circ$). Odstupanje *Elastica* metode bez utjecaja antiklastičnog efekta raste s povećanjem kuta rotacije mehanizma, ali njegov utjecaj nije značajan jer pri kutu od $\vartheta = 30^\circ$ iznosi $\Delta\sigma = 0,894\%$. Odstupanja vrijednosti napreznja dobivenih metodom pseudo-krutog modela četveroštapnog

mehanizma se smanjuju s porastom kuta rotacije i pri kutu $\vartheta = 1^\circ$ odstupanje iznosi $\Delta\sigma = 5,11\%$, dok pri kutu $\vartheta = 30^\circ$ ono iznosi $\Delta\sigma = 0,14\%$.

Izračunate su vrijednosti i reakcijskih sila u uklještenjima za kutove rotacije mehanizma $0 < \vartheta \leq 30^\circ$ primjenom *Elastica* metode i očitane su vrijednosti dobivene metodom konačnih elemenata. Ostvareno je izvrsno poklapanje rezultata. Vrijednosti za sile, kao što je već rečeno, relativno su male te ne prelaze kritičnu vrijednost koja bi mogla uzrokovati izvijanje, odnosno nestabilnost zgloba.

7.4 Granice primjenjivosti analitičkih metoda

Iz rezultata danih na dijagramima (7.1) do (7.4) moguće je dati i kritički osvrt na granice primjenjivosti razmatranih analitičkih metoda (posebice onih koje uključuju aproksimacije istaknute u 4. poglavlju) u odnosu na stupanj tražene točnosti proračuna.

Osnovni parametri kojima se definiraju naprezanja i deformacije rotacijskih podatljivih mehanizama su rotacijska krutost, veličina i faza parazitnog pomaka te naprezanje i reakcije u uklještenjima. Analizom metodom konačnih elemenata moguće je odrediti sve navedene parametre. Stoga su razmatrane analitičke metode izračuna rotacijskih podatljivih mehanizma opterećenih momentom uspoređene s tom metodom te je usporedba pokazala sljedeće:

- *Elastica* metodom moguće je odrediti rotacijsku krutost, veličinu i fazu parazitnog pomaka te naprezanja i reakcije u uklještenjima i dobiveno je izvrsno poklapanje rezultata s metodom konačnih elemenata na cijelom području ispitanih kutova rotacije mehanizma. Objema metodama uzet je u obzir utjecaj antiklastičnog efekta. *Elastica* metodom rješava se točna diferencijalna jednadžba elastične linije lisnate opruge dana izrazom (2.3) pa su, očekivano, njome dobiveni najtočniji rezultati u odnosu na druge analitičke metode. Kada se *Elastica* metodom ne bi uzeo u obzir antiklastični efekt odstupanja od metode konačnih elemenata, koja uzima u obzir taj efekt, rastu s porastom kuta rotacije mehanizma ϑ . Za analizirani model pri kutu $\vartheta = 30^\circ$ razlika za rotacijsku krutost iznosi $\Delta K = 1,01\%$ te za naprezanja u uklještenjima $\Delta\sigma = 0,894\%$.
- Metodom približne zakrivljenosti prema Wittricku uzima se u obzir utjecaj aksijalne sile na savijanje lisnate opruge, ali se diferencijalna jednadžba elastične linije lisnate opruge pojednostavljuje zanemarivanjem male vrijednosti $(dy/dx)^2$ u izrazu (2.3). Ovim pojednostavljenjem uvodi se pogreška koja je tim veća što je veći kut rotacije mehanizma ϑ [Wittrick, 1948]. Metodom je moguće odrediti rotacijsku krutost mehanizma, a

odstupanja od metode konačnih elemenata rastu s porastom kuta rotacije mehanizma pa pri kutu $\vartheta = 30^\circ$ razlika iznosi $\Delta M = -5,03\%$. Metodom približne zakrivljenosti prema Wittricku pretpostavlja se da je, ako je kut rotacije mehanizma mali, pomak geometrijskog središta zanemariv te autor metode preporuča njenu primjenu pri $\vartheta \leq 20^\circ$ [Wittrick, 1948]. Iz Slike 7.2 vidljivo je da tu pretpostavku treba 'uzeti' s rezervom, jer je već pri kutu rotacije od $\vartheta = 7^\circ$ odstupanje vrijednosti veće nego kod drugih primijenjenih metoda izračuna, izuzev geometrijske metode zglobnog četverokuta. Primjena ove metode preporuča se stoga kada je kut $\vartheta \leq 5^\circ$ te ako se pri izračunu rotacijskog podatljivog mehanizma ne zahtjeva velika točnost.

- Metodom pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema Howellu određuje se rotacijska krutost i naprezanje u uklještenjima. Autori u radu [Jensen, Howell, 2002] navode da je metoda aproksimacijska te nepogodna za precizne proračune pa nisu definirali izraz za izračun veličine i faze parazitnog pomaka. Na osnovu njihovog modela (cf. Sliku 4.18) u disertaciji su ipak izvedeni izrazi koji definiraju parazitni pomak. Odstupanja vrijednosti rotacijske krutosti dobivene ovom metodom od metode konačnih elemenata smanjuju se s porastom kuta rotacije mehanizma ϑ , a za analizirani model najmanja su pri vrijednosti kuta rotacije od $\vartheta = 17^\circ$ i iznose $\Delta K = 0$. Odstupanja veličine parazitnog pomaka pokazuju rast s porastom kuta rotacije mehanizma, a pri kutovima $\vartheta \geq 25^\circ$ odstupanja od metode konačnih elemenata se ne povećavaju. Za fazu parazitnog pomaka dobivene su identične vrijednosti kao i metodom konačnih elemenata. Odstupanja vrijednosti naprežanja dobivenih metodom pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma smanjuju se s porastom kuta rotacije i pri kutu $\vartheta = 1^\circ$ odstupanje iznosi $\Delta\sigma = 5,11\%$, dok pri kutu $\vartheta = 30^\circ$ ono iznosi $\Delta\sigma = 0,14\%$. Zaključuje se da je u odnosu na druge približne metode, primjena ove metode pogodna za veće kutove rotacije mehanizma ($\vartheta \geq 22^\circ$), posebice ako se ne traži prevelika preciznost izračuna.
- Metodom pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom prema Howellu može se izračunati rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma. Odstupanja vrijednosti rotacijske krutosti od onih dobivenih metodom konačnih elemenata s utjecajem antiklastičnog efekta smanjuju se s porastom kuta rotacije mehanizma ϑ . Od svih analiziranih metoda rotacijska krutost dobivena ovom metodom, za analizirani model, odstupa najviše ako je kut $\vartheta \leq 25^\circ$, dok su za $\vartheta \geq 25^\circ$ odstupanja dobivena ovom metodom manja od onih metode približne zakrivljenosti prema Wittricku. Ovom se metodom pretpostavlja da geometrijsko središte mehanizma miruje, tj. vrijedi da

normalizirana veličina parazitnog pomaka iznosi $d/L = 0$, pa stoga faza parazitnog pomaka nije definirana. Zbog pretpostavke da geometrijsko središte mehanizma miruje, metoda je primjenjiva na području malih kutova rotacije mehanizma ϑ , ali se njome tada dobivaju rotacijske krutosti koje odstupaju cca. $\Delta K = 7,7$ % od rezultata numeričke analize. Također, ovom se metodom ne mogu odrediti naprezanja u uklještenjima. Zaključuje se da je metoda nepouzdana i time pogodna samo za preliminarne izračune.

- Metodom pseudo–krutog modela prema Peiu, kinematičkog modela prema Wuestu, geometrijske metode prema Troegeru te geometrijske metode zglobnog četverokuta opisane u poglavlju 4.3 određuju se veličina i faza parazitnog pomaka. Njima nije definirana rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma kao ni naprezanja u uklještenjima lisnatih opruga. Normalizirana veličina parazitnog pomaka dobivena metodom pseudo–krutog modela prema Peiu neznatno odstupa od metode konačnih elemenata u cijelom promatranom području kutova rotacije. Ova se metoda, stoga, može primjenjivati kod preciznih izračuna veličine parazitnog pomaka rotacijskog podatljivog mehanizma. Odstupanja normalizirane veličine parazitnog pomaka dobivena primjenom geometrijske metode prema Troegeru i kinematičkog modela prema Wuestu u odnosu na rezultate dobivene metodom konačnih elemenata eksponencijalno rastu s porastom kuta rotacije mehanizma. Obje su metode dale zadovoljavajuće rezultate i mogu se primjenjivati kod manje zahtjevnih preliminarne izračuna rotacijskih podatljivih mehanizama. Očekivano, geometrijska metoda zglobnog četverokuta nije dala zadovoljavajuće rezultate jer njome nisu uzeti u obzir savijanje grede i utjecaj aksijalnih sila. Za izračun faze parazitnog pomaka pogodne su geometrijska metoda prema Troegeru i geometrijska metoda zglobnog četverokuta. Metoda pseudo–krutog modela prema Peiu i kinematički model prema Wuestu nisu dali zadovoljavajuću točnost. Treba napomenuti da faza parazitnog pomaka iznosi polovicu kuta rotacije mehanizma, te ju je stoga i jednostavno odrediti.

U ovoj cjelini doktorske disertacije provedena je usporedba rezultata analize metodom konačnih elemenata, *Elastica* metode i rezultata različitih približnih analitičkih pristupa modeliranja ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama. Najbolje poklapanje rezultata s metodom konačnih elemenata ostvareno je *Elastica* metodom. U nastavku rada koristit će se metoda konačnih elemenata da bi se analizirao utjecaj konstrukcijskih parametara na ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama.

8 Numerička analiza konstrukcijskih parametara rotacijskih podatljivih mehanizama

U 3. i 4. poglavlju doktorske disertacije opisane su analitičke metode modeliranja simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama kojima se predviđa njihovo ponašanje u primjeni, dok su u 5. poglavlju opisani rezultati eksperimentalnih mjerenja pronađeni u dostupnoj literaturi. U 6. poglavlju je pak opisan i numerički model simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama opterećenih momentom što je omogućilo usporedbu rezultata numeričke analize i eksperimentalnih mjerenja dostupnih u literaturi. Na osnovu usporedbe zaključeno je da je numerička analiza pogodan alat za predviđanje ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama. Na osnovu usporedbe provedene u 7. poglavlju uočeno je izvrsno poklapanje rezultata dobivenih *Elastica* metodom koja u obzir uzima točan izraz za izračun elastične linije lisnatih opruga na polju velikih (geometrijski nelinearnih) deformacija s rezultatima numeričke analize metodom konačnih elemenata.

U ovom će poglavlju numerička analiza biti proširena kako bi se analiziralo ponašanje različitih konstrukcijskih izvedbi rotacijskih podatljivih mehanizama. Cilj proširene numeričke analize je ispitivanje utjecaja navedenih konstrukcijskih parametara te posljedično definiranje konstrukcijskog rješenja koje daje najmanju varijaciju rotacijske krutosti te najmanje parazitne pomake čak i kod velikih kutova rotacije zgloba. Stoga će se analizirati

utjecaj sljedećih konstrukcijskih parametara:

- Različiti kutovi α lisnatih opruga prema vertikalnoj osi.
- Pomicanje točke presjecišta lisnatih opruga.
- Lisnate opruge s početnom zakrivljenošću.
- Monolitna izvedba rotacijskog podatljivog mehanizma.

Kod svih se analiziranih konstrukcijskih izvedbi rotacijskih podatljivih mehanizama pretpostavlja da su lisnate opruge izrađene iz slitine bakra i berilija.

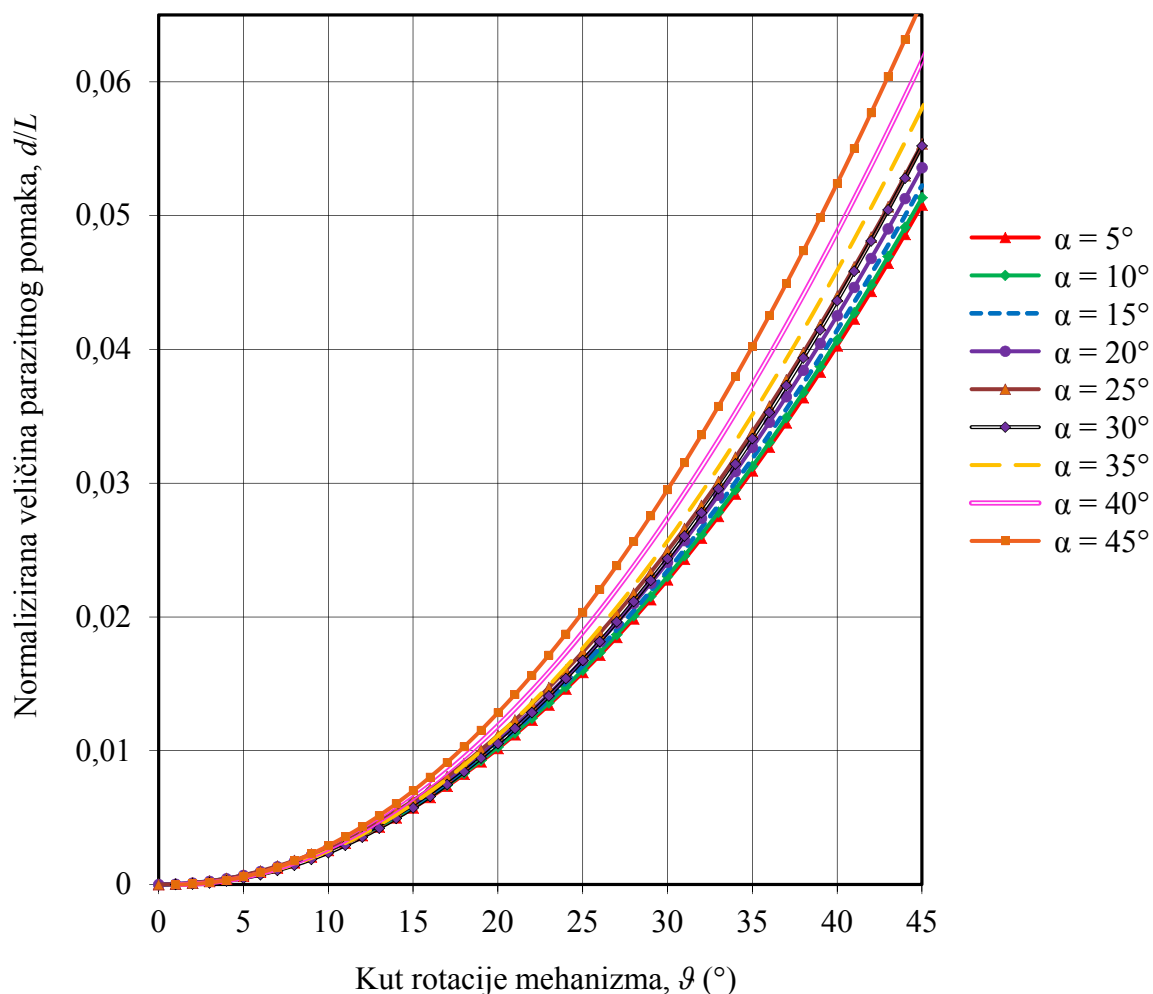
8.1 Ovisnost naprezanja i deformacija o kutu α

Analizom normaliziranih veličina parazitnih pomaka dobivenih u dosadašnjem radu na doktorskoj disertaciji, uočene su određene pravilnosti. Naime, pokazalo se da su normalizirane veličine parazitnih pomaka d/L pri određenom kutu rotacije mehanizma ϑ iste kod više različitih simetričnih konstrukcijskih konfiguracija mehanizma α , s različitim geometrijskim karakteristikama lisnatih opruga, ako je kut između lisnatih opruga 2α u tim konfiguracijama jednak. Kako bi se dokazala ta tvrdnja, analiziran je veći broj konstrukcijskih konfiguracija rotacijskog podatljivog mehanizma. Analizirane su tako tri konfiguracije s različitim duljinama L , širinama b i debljinama t , te je za sve tri konfiguracije variran kut α lisnatih opruga prema vertikalnoj osi s inkrementom od 5° . U svim je razmatranim slučajevima maksimalni kut rotacije mehanizma iznosio $\vartheta = 45^\circ$. Geometrijski parametri analiziranih konstrukcija rotacijskih podatljivih mehanizama dani su u Tablici 8.1, dok su odgovarajuće vrijednosti normalizirane veličine parazitnih pomaka dobivene metodom konačnih elemenata prikazane na Slici 8.1.

Tablica 8.1 Geometrijske karakteristike analiziranih konstrukcijskih konfiguracija

Konfiguracija	Duljina lisnate opruge L (mm)	Širina lisnate opruge b (mm)	Debljina lisnate opruge t (mm)
Mod01	5	6	0,3
Mod02	20	7	0,5
Mod03	50	12	0,4

Prema očekivanjima, za sve tri konfiguracije, za određeni par kutova α i ϑ , dobivene su identične vrijednosti normaliziranih veličina parazitnih pomaka. Na Slici 8.1 uočava se također da s porastom kuta lisnatih opruga prema vertikali raste i normalizirana veličina parazitnog pomaka, a da se smanjuje rotacijska preciznost podatljivog zgloba.



Slika 8.1 Normalizirana veličina parazitnog pomaka ovisna o kutu rotacije mehanizma za konstrukcijske konfiguracije Mod01, Mod02 i Mod03 iz Tablice 8.1

Uz pretpostavku da se ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma može opisati polinomom drugog stupnja, provedena je i regresijska analiza krivulja prikazanih na Slici 8.1. U tom bi slučaju polinom imao oblik

$$\frac{d}{L} = a + b\vartheta + c\vartheta^2 \quad (8.1)$$

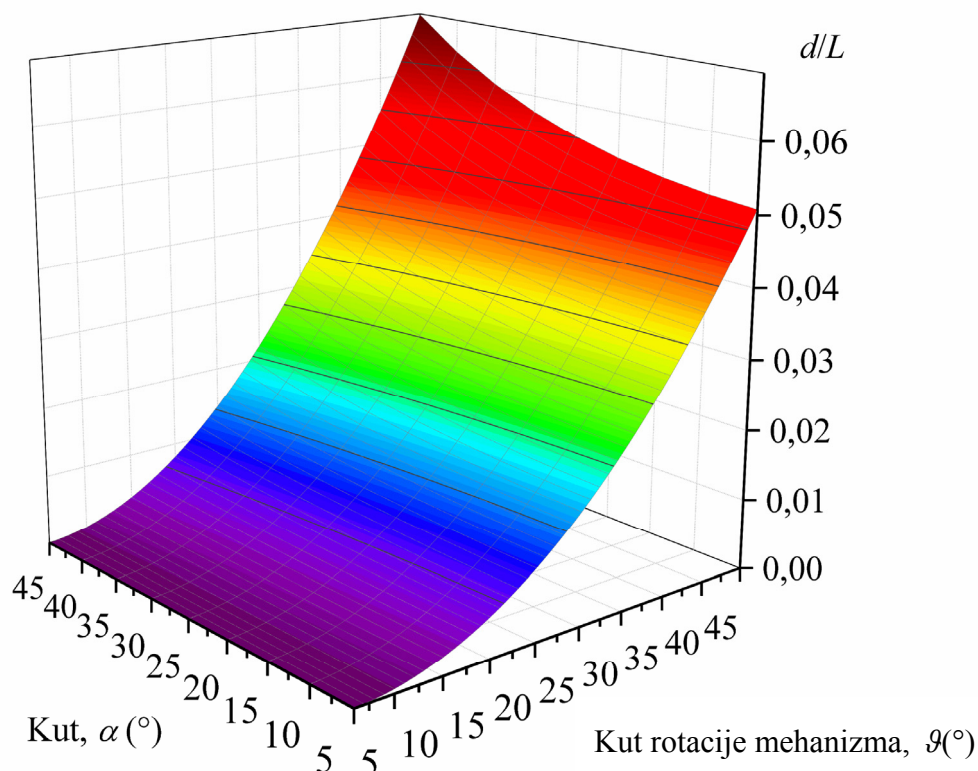
U Tablici 8.2 dani su koeficijenti a , b i c uz pomoć kojih se može izračunati vrijednost normalizirane veličine parazitnog pomaka d/L u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma ϑ i kutu lisnatih opruga prema vertikali α pa je za ovaj oblik polinoma određen koeficijent korelacije r . U izraz (8.1) kut ϑ uvrštava se u stupnjevima.

Budući da koeficijent korelacije r označava povezanost između varijabli d/L i ϑ , to što je vrijednost koeficijenta korelacije bliža jedinici ostvarena je bolja povezanost varijabli.

Tablica 8.2 Koeficijenti polinoma iz izraza (8.1) i koeficijenti korelacije

α (°)	a	b	c	r
5	$-6,521715791 \cdot 10^{-5}$	$1,630551627 \cdot 10^{-5}$	$2,479490385 \cdot 10^{-5}$	0,99999779
10	$-6,991875269 \cdot 10^{-5}$	$1,748265166 \cdot 10^{-5}$	$2,503980658 \cdot 10^{-5}$	0,99999752
15	$-7,822021345 \cdot 10^{-5}$	$1,956342375 \cdot 10^{-5}$	$2,545568264 \cdot 10^{-5}$	0,99999701
20	$-9,090771458 \cdot 10^{-5}$	$2,274717206 \cdot 10^{-5}$	$2,605449245 \cdot 10^{-5}$	0,99999617
25	$-1,092553905 \cdot 10^{-4}$	$2,735941739 \cdot 10^{-5}$	$2,685380786 \cdot 10^{-5}$	0,99999484
30	$-1,352810503 \cdot 10^{-4}$	$3,391425573 \cdot 10^{-5}$	$2,787760737 \cdot 10^{-5}$	0,99999274
35	$-1,721353192 \cdot 10^{-4}$	$4,322041542 \cdot 10^{-5}$	$2,915724341 \cdot 10^{-5}$	0,99998944
40	$-2,248267227 \cdot 10^{-4}$	$5,657246378 \cdot 10^{-5}$	$3,073221445 \cdot 10^{-5}$	0,99998415
45	$-3,014930559 \cdot 10^{-4}$	$7,6091707 \cdot 10^{-5}$	$3,265018587 \cdot 10^{-5}$	0,99997553

Na Slici 8.2 prikazana je ovisnost vrijednosti d/L o kutu rotacije mehanizma ϑ i kutu α za konstrukcijske konfiguracije Mod01, Mod02 i Mod03. U praksi kut lisnatih opruga prema vertikali rijetko poprima vrijednosti $\alpha < 15^\circ$. Stoga je provedena i regresijska analiza plohe sa Slike 8.2 na području $15^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ i $0^\circ \leq \vartheta \leq 45^\circ$.



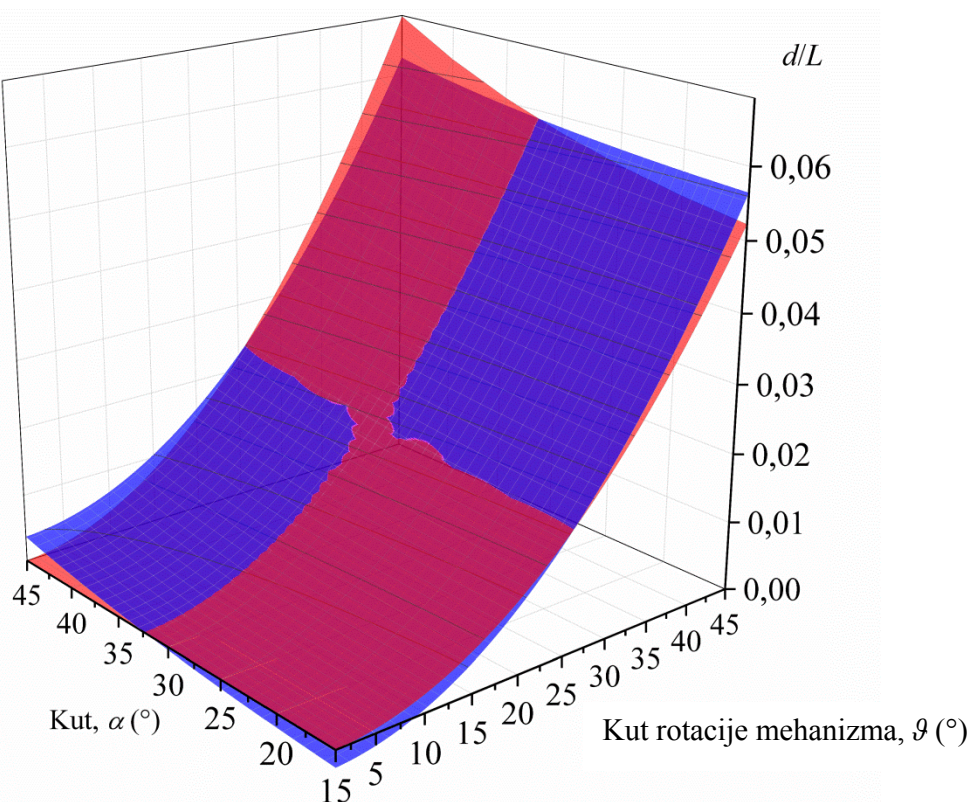
Slika 8.2 Normalizirana veličina parazitnog pomaka ovisna o kutu rotacije mehanizma ϑ i kutu α za konstrukcijske konfiguracije Mod01, Mod02 i Mod03

Na osnovu te analize uporabom nelinearne višestruke regresije dobiven je sljedeći izraz

$$\begin{aligned} \frac{d}{L} = & -0,0031 + 7,28412 \cdot 10^{-8} \vartheta + 3,00771 \cdot 10^{-5} \vartheta^2 + 1,2591 \cdot 10^{-9} \vartheta^3 - \\ & - 5,61384 \cdot 10^{-10} \vartheta^4 + 1,17951 \cdot 10^{-12} \vartheta^5 + 1,61774 \cdot 10^{-5} \alpha + \\ & + 1,12251 \cdot 10^{-6} \alpha^2 + 6,2106 \cdot 10^{-8} \alpha^3 - 1,11108 \cdot 10^{-9} \alpha^4 + 1,43415 \cdot 10^{-11} \alpha^5 \end{aligned} \quad (8.2)$$

koji omogućuje određivanje vrijednosti d/L ovisno o kutovima ϑ i α . Vrijednosti kutova se u izraz (8.2) uvrštavaju u stupnjevima. Izraz (8.2) dobiven je uz ostvareni koeficijent korelacije $r = 0,995474786$, pa se može zaključiti da je ostvareno vrlo dobro poklapanje rezultata.

Na Slici 8.3 plavom su bojom prikazane normalizirane veličine parazitnog pomaka d/L dobivene korištenjem izraza (8.2). Crvenom su bojom prikazane vrijednosti d/L dobivene analizom metodom konačnih elemenata. Plohama je radi bolje vizualizacije dana prozirnost.



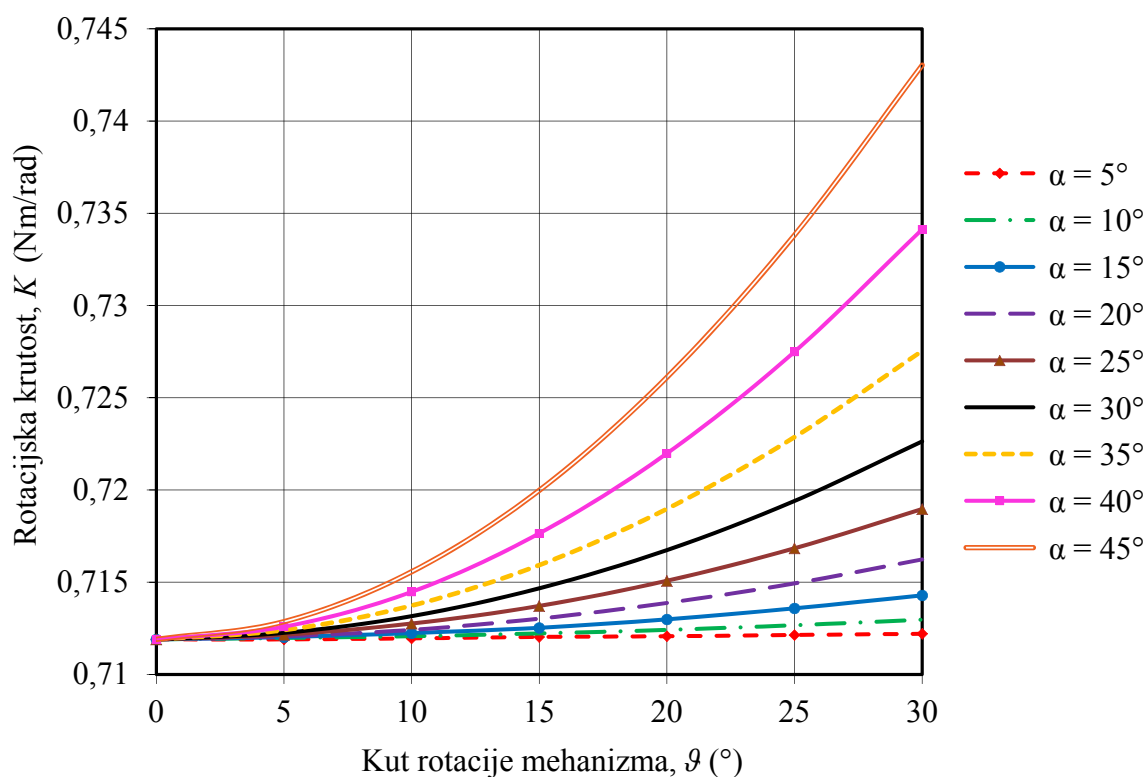
Slika 8.3 Vrijednosti d/L dobivene analizom metodom konačnih elemenata (crvena boja) i izračunatih primjenom izraza (8.2) (plavom bojom) u ovisnosti o kutovima ϑ i α

Uočava se da je najveća točnost rezultata ostvarena pri kutu lisnatih opruga prema vertikalnoj osi od $\alpha = 32,5^\circ$ i kutu rotacije mehanizma od $\vartheta = 26^\circ$, a najveće se odstupanje javlja za slučaj kada je $\alpha = 45^\circ$ i $\vartheta = 45^\circ$ i iznosi samo $\Delta d/L = 0,00627$, tj. manje od 10-ak posto vrijednosti

same normalizirane veličine parazitnog pomaka.

S obzirom da se faza parazitnog pomaka φ , kako je pokazano i na Slici 7.3, može računati primjenom izraza (3.123), tj. $\varphi = \vartheta/2$, vrijednost φ ne ovisi o promjeni kuta α , već samo o promjeni kuta rotacije ϑ .

U nastavku je analiziran utjecaj promjene kuta α na moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma te je utvrđeno da s porastom kutova α i ϑ potrebni moment raste. Obzirom da vrijedi izraz $K = M/\vartheta$, na Slici 8.4 prikazana je upravo ovisnost rotacijske krutosti mehanizma o promjeni kutova α i ϑ . Analizirana je pritom konstrukcijska konfiguracija s geometrijom lisnatih opruga identičnom onoj konstrukcije označene sa ZdB u Tablici 5.4.

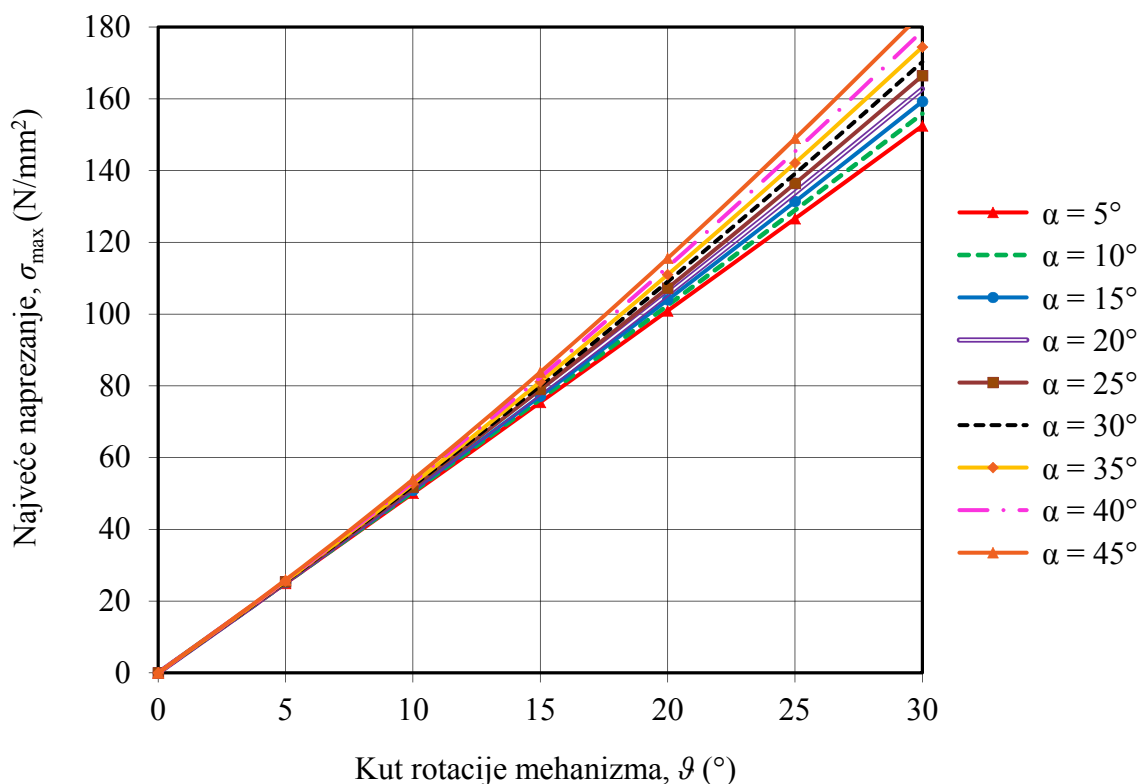


Slika 8.4 Rotacijska krutost mehanizma ovisna o kutu rotacije ϑ i kutu lisnatih opruga prema vertikali α

Vidljivo je da rotacijska krutost mehanizmima eksponencijalno rase s porastom kuta rotacije mehanizma ϑ , te da je rast tim veći što je veći kut α . Za vrijednost $\alpha = 5^\circ$ rotacijska krutost ima gotovo konstantnu vrijednost, odnosno vrlo malo raste s porastom kuta ϑ . Daljnjom analizom utvrđeno je da ako $\vartheta \rightarrow 0^\circ$ rotacijska krutost teži vrijednosti $K = 0,71196$ Nm/rad, odnosno vrijednosti koju bi imala samo jedna lisnata opruga ukupne širine $2b$, i to bez obzira na vrijednost kuta α . Iz dijagrama je vidljivo i da ukupni rast rotacijske krutosti nije značajan

pa tako za $\alpha = 45^\circ$ i kutove rotacije mehanizma od 0° do 30° , taj rast iznosi cca. 4,3%.

Na Slici 8.5 prikazana su naprezanja u uklještenjima ovisna o kutovima α i ϑ .



Slika 8.5 Najveće naprezanje ovisno o kutu rotacije ϑ mehanizma i kutu lisnatih opruga prema vertikali α

Najveće naprezanje raste s porastom kutova α i ϑ te je pri kutu rotacije mehanizma $\vartheta = 30^\circ$ i kutu $\alpha = 45^\circ$ očitano naprezanje cca. 20% veće u odnosu na naprezanje koje se javlja kod kuta $\alpha = 5^\circ$.

8.2 Ovisnost naprezanja i deformacija o položaju presjecišta lisnatih opruga

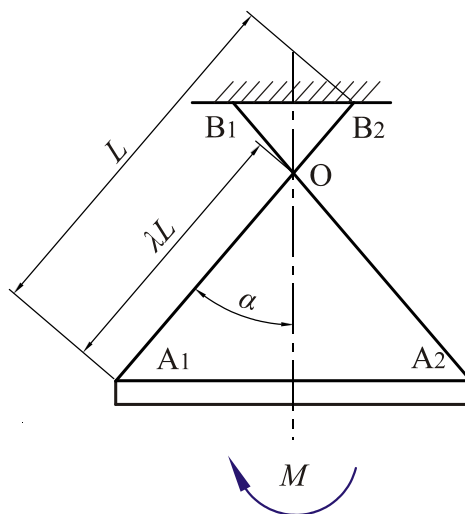
U ovom će se dijelu doktorske disertacije analizirati utjecaj pomicanja točke presjecišta lisnatih opruga na parazitne pomake, i rotacijsku krutost mehanizma, a vodeći računa o napreznjima koja se javljaju u uklještenjima.

Utjecaj pomicanja točke presjecišta rotacijskog podatljivog mehanizma opterećenog momentom analiziran je u referencama [Wittrick, 1951] i [Bitencourt et al., 2011] primjenom metode približne zakrivljenosti. Utjecaj tog konstrukcijskog parametra u referenci [Pei et al.,

2010] analiziran je metodom pseudo–krutog modela, dok je u referenci [Hongzhe, Shusheng, 2010. II] primijenjeno geometrijsko pojednostavljenje.

Geometrija i materijal lisnatih opruge analiziranog podatljivog mehanizma identični su lisnatim oprugama modela označenog u Tablici 5.4 sa ZdB.

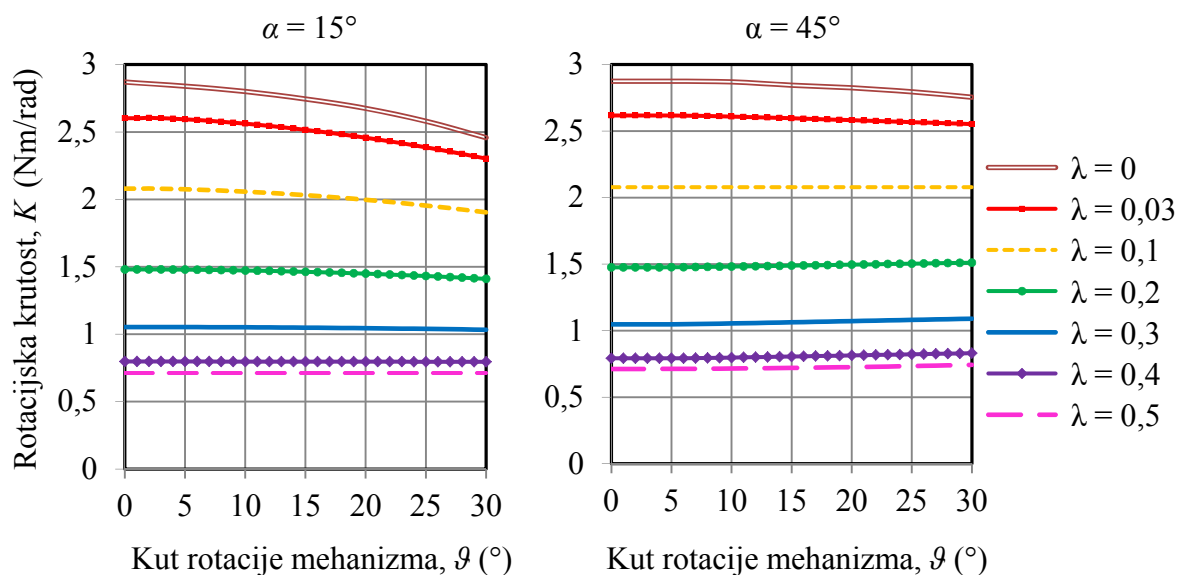
Na Slici 8.6 prikazan je rotacijski podatljivi mehanizam čije se lisnate opruge ne sijeku na sredini aktivnih duljina. Sjecište lisnatih opruga, odnosno položaj točke O, definirano je konstrukcijskim parametrom λ kako je prikazano na slici.



Slika 8.6 Rotacijski podatljivi mehanizam čije se lisnate opruge ne sijeku na sredini aktivnih duljina

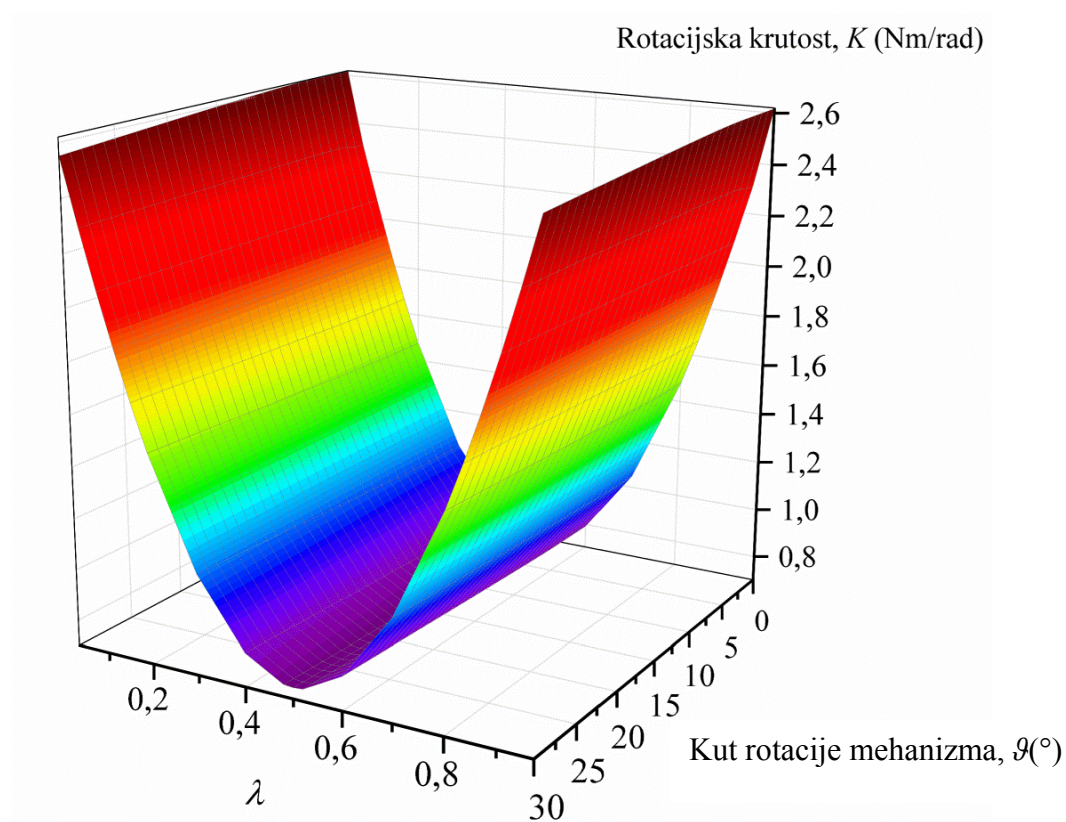
Analizirani su modeli rotacijskih podatljivih mehanizama s kutovima α od 15° , 30° i 45° lisnatih opruga prema vertikali. Treba napomenuti da su analizom, prema očekivanjima, dobivene identične vrijednosti momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije, rotacijske krutosti, te normalizirane veličine i faze parazitnih pomaka za vrijednosti λ i $(1 - \lambda)$ jer su modeli zrcalno simetrični.

Na Slici 8.7 prikazane su za različite konstrukcijske parametre λ vrijednosti rotacijske krutosti za kutove $\alpha = 15^\circ$ i $\alpha = 45^\circ$ u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma ϑ . Vidljivo je da je utjecaj kuta α na rotacijsku krutost mehanizma znatno manji od utjecaja položaja presjecišta lisnatih opruga, odnosno vrijednosti parametra λ . Vrijednost rotacijske krutosti mehanizma pri $\lambda = 0,03$ više je od 3 puta veća od vrijednosti dobivenih pri $\lambda = 0,5$. Kod $\alpha = 15^\circ$ uočava se nešto veći pad rotacijske krutosti sa smanjivanjem vrijednosti konstrukcijskog parametra λ nego kod $\alpha = 45^\circ$.



Slika 8.7 Rotacijska krutost ovisna o kutu rotacije ϑ i parametru λ za $\alpha = 15^\circ$ i $\alpha = 45^\circ$

Na Slici 8.8 je, zbog zornijeg prikaza, dana promjena vrijednosti rotacijske krutosti u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma i parametru λ za kut $\alpha = 45^\circ$ u trodimenzijskom prikazu.

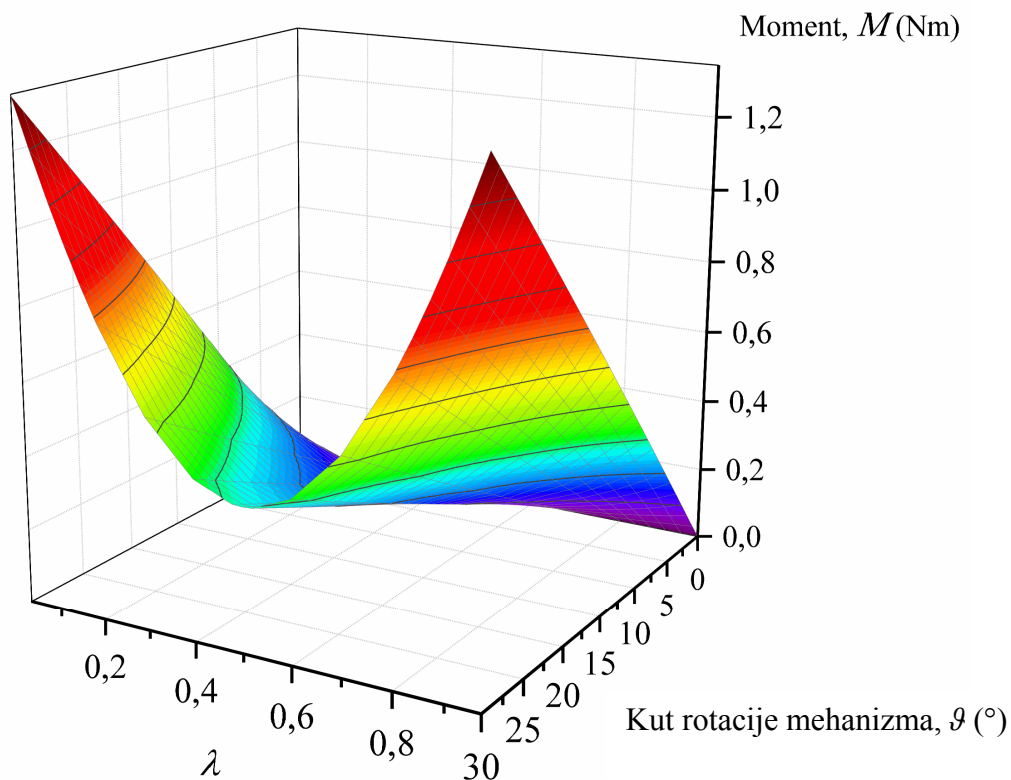


Slika 8.8 Promjena rotacijske krutosti rotacijskog mehanizma ovisna o kutu rotacije mehanizma ϑ i parametru λ za $\alpha = 45^\circ$

Rotacijska krutost rotacijskog mehanizma najmanja je kada je $\lambda = 0,5$ a eksponencijalno raste

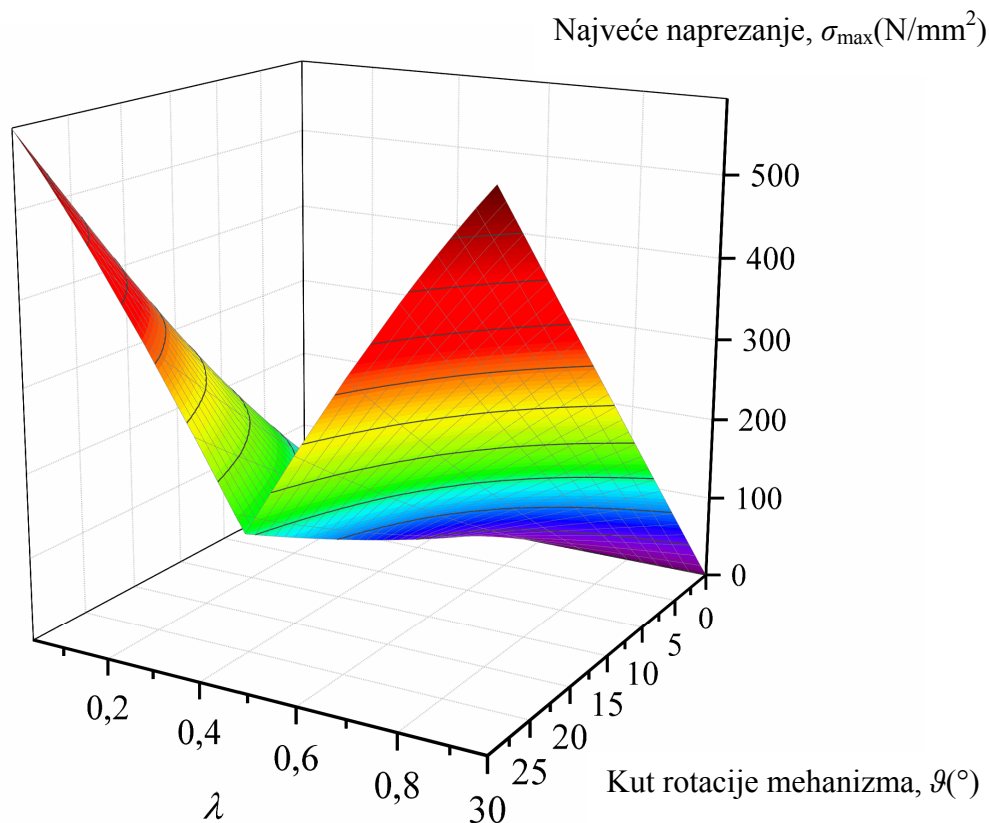
kada $\lambda \rightarrow 0$.

Na Slici 8.9 je pak prikazana ovisnost momenta potrebnog za dobivanje željenog kuta rotacije ϑ o tom kutu i konstrukcijskom parametru λ za kut $\alpha = 45^\circ$. Obzirom da vrijedi izraz $M = K/\vartheta$, jasno je da će potrebni moment, kao i rotacijska krutost, biti najmanji kada je $\lambda = 0,5$ i eksponencijalno rasti kada $\lambda \rightarrow 0$ ili $\lambda \rightarrow 1$. Moment će imati gotovo linearnu ovisnost o kutu rotacije mehanizma ϑ .



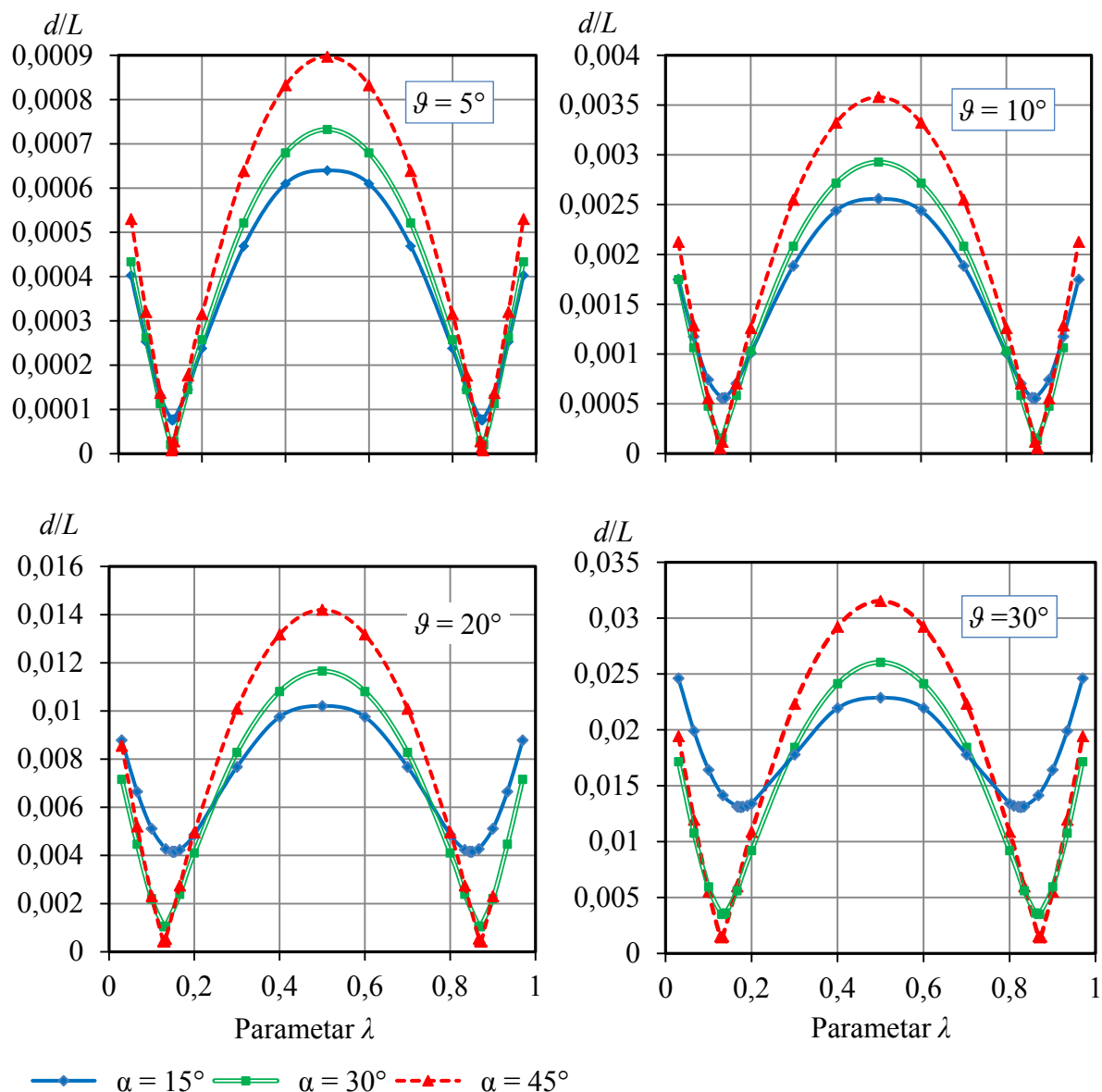
Slika 8.9 Ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ o tom kutu i parametru λ za kut $\alpha = 45^\circ$

Na Slici 8.10 prikazana su najveća naprezanja ovisna o kutu rotacije mehanizma α i parametru λ za kut $\alpha = 45^\circ$. Pa tako najveća naprezanja u uklještenju eksponencijalno rastu s promjenom vrijednosti parametra λ od vrijednosti $\lambda = 0,5$ prema 0 ili 1, dok gotovo linearno rastu s rastom kuta rotacije mehanizma ϑ . Može se zaključiti da je utjecaj parametra λ na najveća naprezanja u mehanizmu značajan, te su najveća naprezanja pri $\lambda = 0,03$ više od 3 puta veća od vrijednosti naprezanja u uklještenju dobivenih pri $\lambda = 0,5$.

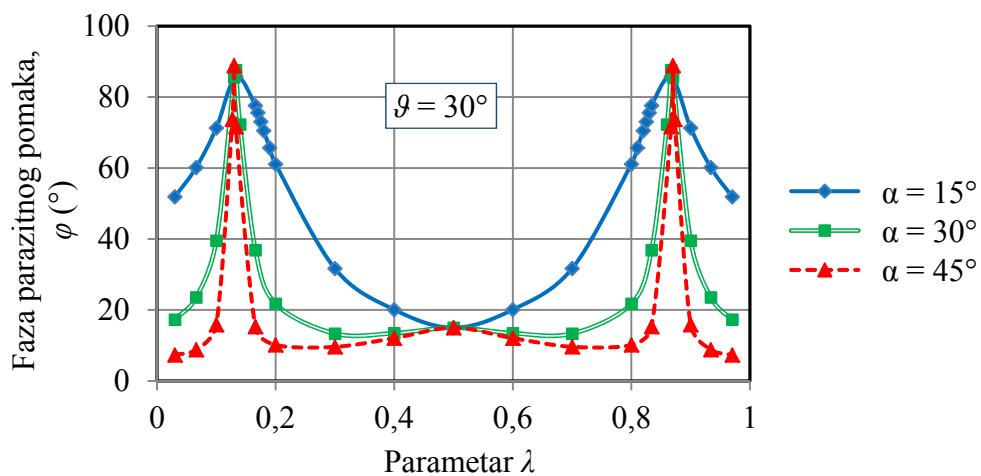


Slika 8.10 Ovisnost najvećeg naprezanja o kutu rotacije mehanizma ϑ i parametru λ za kut $\alpha = 45^\circ$

Analiza utjecaja konstrukcijskog parametra λ na parazitne pomake sažeta je na Slikama 8.11 i 8.12. Na Slici 8.11 prikazane su normalizirane veličine parazitnih pomaka ovisne o parametru λ za kutove rotacije mehanizma $\vartheta = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ i 30° i kutove $\alpha = 15^\circ, 30^\circ$ i 45° . Na Slici 8.12 prikazana je promjena faze parazitnog pomaka za kut rotacije mehanizma $\vartheta = 30^\circ$ i kutove, $\alpha = 15^\circ, 30^\circ$ i 45° . Iz Slika 8.11 i 8.12 vidljivo je da je utjecaj parametra λ na normaliziranu veličinu i fazu parazitnog pomaka vrlo velik, a utjecaj raste i s porastom kuta α . Također se može zaključiti da u područjima u kojima normalizirana veličina parazitnog pomaka poprima minimalne vrijednosti, faza poprima maksimalne vrijednosti, odnosno parazitni pomak je gotovo horizontalan. Faza parazitnog pomaka, za razliku od normalizirane veličine toga pomaka, poprima vrlo slične maksimalne vrijednosti bez obzira na vrijednost kuta rotacije ϑ pa je stoga na Slici 8.12 dan samo prikaz faze φ parazitnog pomaka za vrijednost kuta rotacije mehanizma $\vartheta = 30^\circ$.

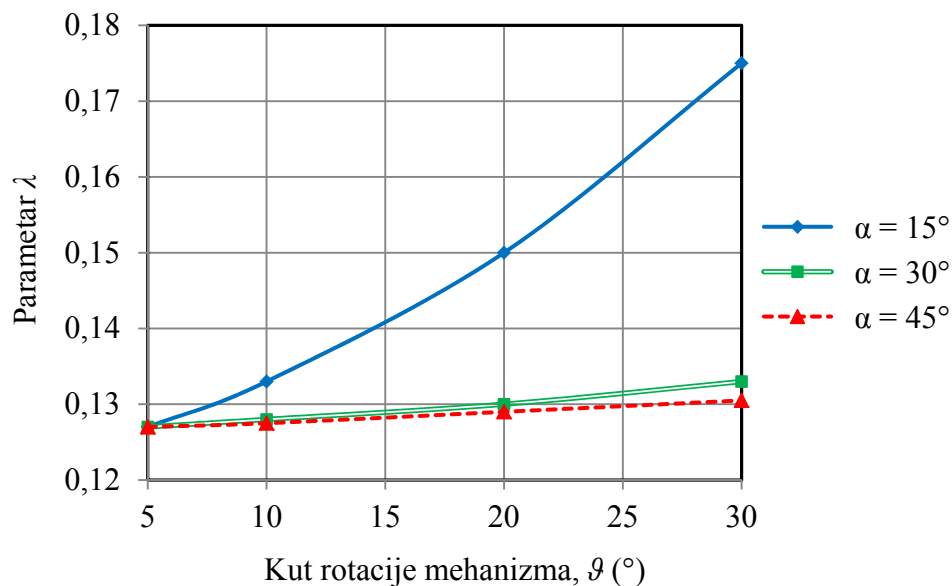


Slika 8.11 Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutovima α i ϑ



Slika 8.12 Promjena faze parazitnog pomaka ovisna o kutovima α i ϑ

Konstruktivski parametar λ za kojeg se dobiva minimalna veličina parazitnog pomaka, mijenja se ovisno o kutu rotacije mehanizma ϑ te o kutu α . Ovisnost parametra λ o kutu rotacije mehanizma ϑ prikazana je na Slici 8.13.



Slika 8.13 Parametar λ za minimalne vrijednosti veličine parazitnog pomaka ovisan o kutu rotacije mehanizma ϑ i kutu α

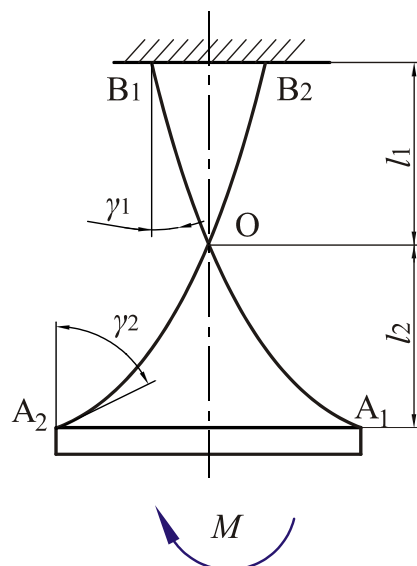
Na Slici 8.13 prikazane su vrijednosti parametra λ pri minimalnim parazitnim pomacima. Najveći rast konstruktivskog parametra λ ovisan o kutu rotacije mehanizma ϑ je pri kutu $\alpha = 15^\circ$. Parazitni pomak će u tom slučaju biti minimalan za vrijednost λ koja će se mijenjati od $\lambda = 0,127$ (pri kutu rotacije $\vartheta = 5^\circ$) do $\lambda = 0,175$ (pri kutu rotacije $\vartheta = 30^\circ$). Promjena najpovoljnije vrijednosti parametra λ pri kutu $\alpha = 30^\circ$ raste pak od vrijednosti $\lambda = 0,127$ do $\lambda = 0,133$, a pri kutu $\alpha = 45^\circ$ minimalni parazitni pomak dobit će se pri porastu vrijednosti λ od $\lambda = 0,127$ do $\lambda = 0,1305$.

Ovdje dobivene optimalne vrijednosti parametra λ ponešto se razlikuju od onih dobivenih u literaturi primjenom približnih metoda spomenutih na početku poglavlja. Doista, u referenci [Wittrick, 1951] primijenjena je metoda približne zakrivljenosti i preporučena vrijednost konstruktivskog parametra λ je $\lambda = 0,127$, a ista je vrijednost dobivena i metodom pseudo–krutog modela u radu [Pei et al., 2010] te geometrijskom metodom u radu [Hongzhe, Shusheng, 2010. II]. U referenci [Bitencourt et al., 2011] je, također metodom približne zakrivljenosti dobivena preporučena vrijednost od $\lambda = 0,13$. Naime, primjenom približnih metoda proračuna uvode se određena pojednostavljenja dok su primjenom metode konačnih elemenata uzete u obzir nelinearnosti koje se javljaju zbog velikih kutova rotacije rotacijskog

podatljivog mehanizma. Osnovna je razlika što su vrijednosti konstrukcijskog parametra λ pri minimalnim parazitnim pomacima, dobivene približnim metodama, neovisne o kutu rotacije mehanizma ϑ i kutu lisnatih opruga prema vertikali α . Iz Slike 8.13 vidljivo je pak da je pretpostavka približnih metoda da vrijednost konstrukcijskog parametra λ pri minimalnim parazitnim pomacima ne ovisi o kutovima ϑ i α kriva. Analiza metodom konačnih elemenata pokazala je da ovisnost tog parametra o kutu rotacije mehanizma ϑ raste sa smanjenjem kuta α . Usporedbom rezultata približnih metoda i numeričke analize zaključuje se stoga da su vrijednosti dobivene približnim metodama zadovoljavajuće kada je $\alpha = 45^\circ$, dok preporučene vrijednosti parametra λ dobivene tim metodama sve više odstupaju sa smanjivanjem kuta α .

8.3 Ovisnost naprezanja i deformacija o početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga

Metodom konačnih elemenata analizirana je i izvedba rotacijskog podatljivog mehanizama kod kojeg lisnate opruge imaju početnu zakrivljenost, a izgled takvog mehanizma prikazan je na Slici 8.14. Rotacijski podatljivi mehanizam opterećen je momentom M . Lisnate se opruge izrađuju iz materijala za opruge koji se hladno valja u trake, posljedično, često u praksi trake iz kojih se izrađuju lisnate opruge imaju početnu zakrivljenost pa je važno utvrditi njen utjecaj na ponašanje rotacijskog podatljivog mehanizma u praksi.



Slika 8.14 Rotacijski podatljivi mehanizam s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću

U ovom je dijelu rada analiziran model s geometrijom poprečnog presjeka lisnatih opruga $b = 15$ mm i $t = 0,5$ mm, dok je duljina lukova lisnatih opruga (A_1OB_1 i A_2OB_2) i dalje

zadržana na $L_{\text{Luk}} = 115$ mm. Točka u kojoj se lisnate opruge sijeku definirana je tako da vrijedi

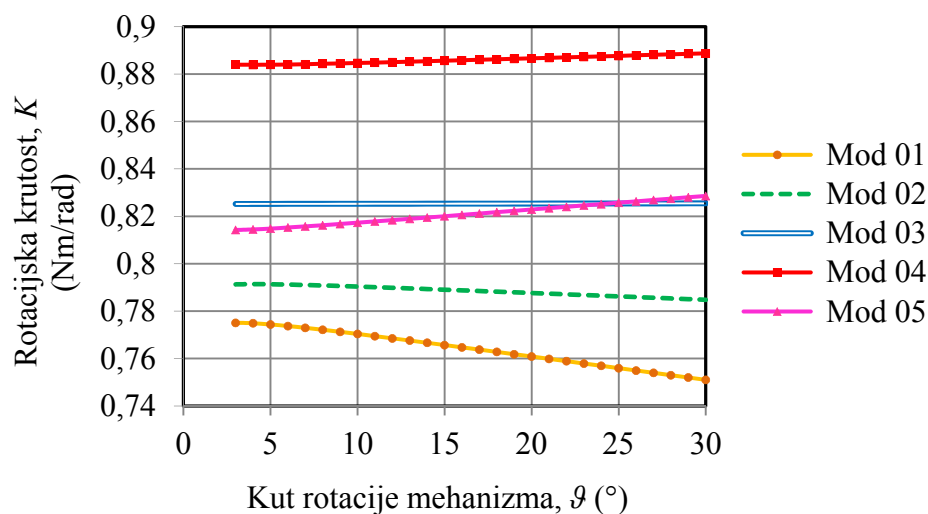
$$l_1 = l_2 \quad (8.3)$$

U analizi su varirani kutovi γ_1 i γ_2 tangenta na kružni luk definiran neutralnom osi lisnatih opruga prema vertikali u rubnim točkama lisnatih opruga (Slika 8.14). Ovisno o vrijednosti kutova γ_1 i γ_2 mijenja se i polumjer zakrivljenosti lisnatih opruga u neopterećenom položaju. U Tablici 8.3 dane su za vrijednosti kutova γ_1 i γ_2 te polumjeri zakrivljenosti lisnatih opruga analiziranih konstrukcijskih konfiguracija rotacijskih podatljivih mehanizama.

Tablica 8.3 Geometrijske karakteristike konstrukcijskih konfiguracija rotacijskih podatljivih mehanizama s oprugama s početnom zakrivljenošću

	γ_1 (°)	γ_2 (°)	r (mm)
Mod 01	0	15	439,27
Mod 02	0	30	219,63
Mod 03	0	45	146,42
Mod 04	0	60	109,81
Mod 05	15	60	146,42

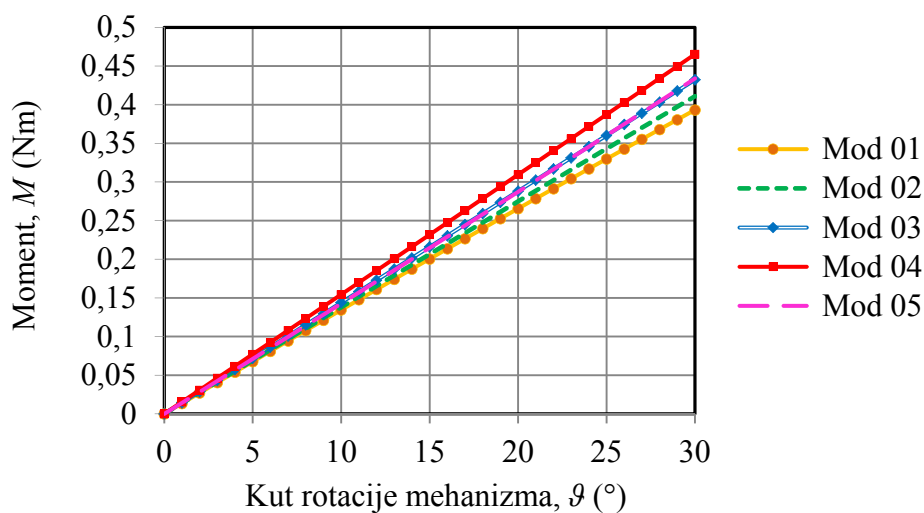
Na Slici 8.15 prikazana je ovisnost rotacijske krutosti mehanizma o kutu rotacije mehanizma ϑ i početnim zakrivljenostima lisnatih opruga, prikazanih kombinacijom kutova γ_1 i γ_2 . Rotacijska krutost mehanizma raste s porastom početne zakrivljenosti, odnosno sa smanjivanjem polumjera početne zakrivljenosti koja ovisi o razlici kutova $\gamma_2 - \gamma_1$. Ukoliko je razlika $\gamma_2 - \gamma_1$ veća, veća je i početna zakrivljenost.



Slika 8.15 Ovisnost rotacijske krutosti podatljivog mehanizma o kutu rotacije ϑ i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga

Analizirani su i modeli s istom početnom zakrivljenošću lisnatih opruga (imaju istu razliku $\gamma_2 - \gamma_1$), ali različitom kombinacijom vrijednosti γ_1 i γ_2 (kombinacije $\gamma_1 = 0^\circ$, $\gamma_2 = 45^\circ$ te $\gamma_1 = 15^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$) te je utvrđeno da u tom slučaju rotacijska krutost obaju modela poprima slične vrijednosti (vidjeti rezultate za Mod 03 i Mod 05 na Slici 8.15). Može se stoga zaključiti da je geometriju rotacijskog mehanizma s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću preciznije definirati kombinacijom kutova γ_1 i γ_2 nego polumjerom početne zakrivljenosti opruga.

Na Slici 8.16 prikazana je ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ o tom kutu za različite kombinacije kutova γ_1 i γ_2 .

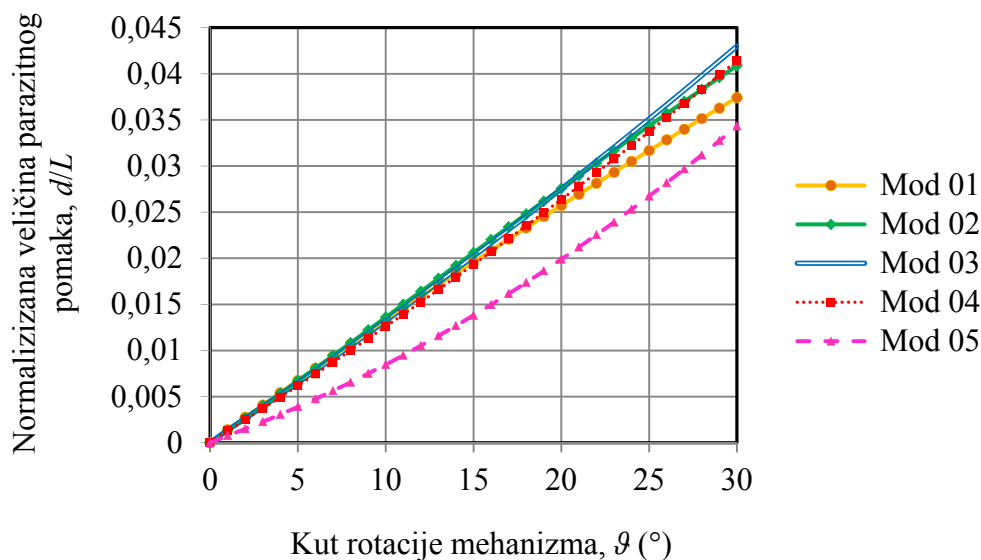


Slika 8.16 Ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ o tom kutu i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga

Vidljivo je da potrebni moment gotovo linearno raste s porastom kuta rotacije ϑ , a njegova vrijednost je veća što je veća vrijednost razlike $\gamma_2 - \gamma_1$. To je naravno očekivano, zbog veze $M = K\vartheta$, pa tako modeli s istom vrijednošću razlike kutova $\gamma_2 - \gamma_1$ imaju i gotovo identičnu ovisnost potrebnog momenta o kutu ϑ .

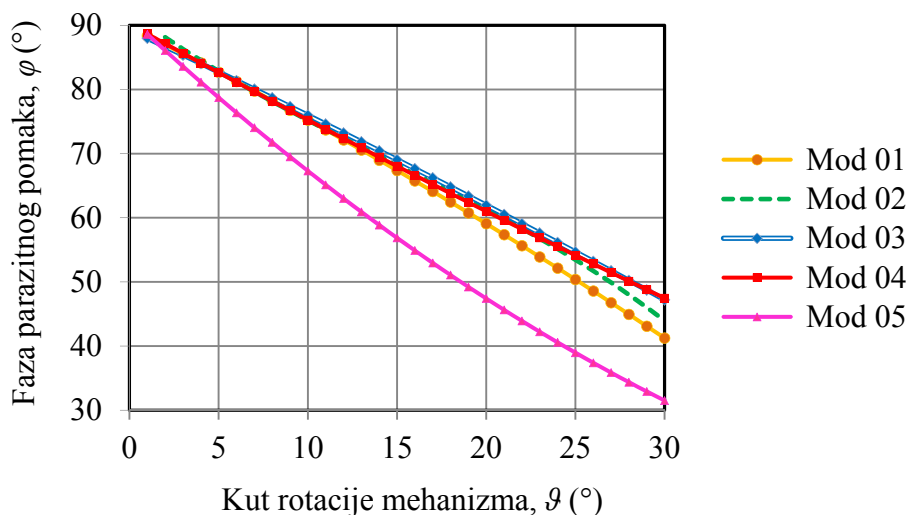
Na Slici 8.17 prikazana je ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije ϑ za različite kombinacije kutova γ_1 i γ_2 . Ne uočavaju se pritom značajnija odstupanja rezultata kod svih modela koji imaju vrijednost kuta $\gamma_1 = 0^\circ$. Iz Slike 8.17 je pak vidljivo da je najpovoljnija izvedba (ona s najmanjom veličinom parazitnog pomaka) ona s kombinacijom kutova $\gamma_1 = 15^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$. Za razliku od rotacijskog mehanizma s ravnim lisnatim oprugama kod kojeg je ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije eksponencijalna, kod mehanizma s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću navedena je

ovisnost gotovo linearna i u cijelom razmatranom području veća nego kod izvedbe s ravnim lisnatim oprugama (cf. Sliku 8.1). Stoga rotacijski podatljivi mehanizam s početnom zakrivljenošću lisnatih opruga ima znatno veću rotacijsku nepreciznost nego mehanizam s ravnim lisnatim oprugama, a ta je nepreciznost izraženija kod manjih kutova rotacije mehanizma (cf. Sliku 8.1).



Slika 8.17 Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma ϑ i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga

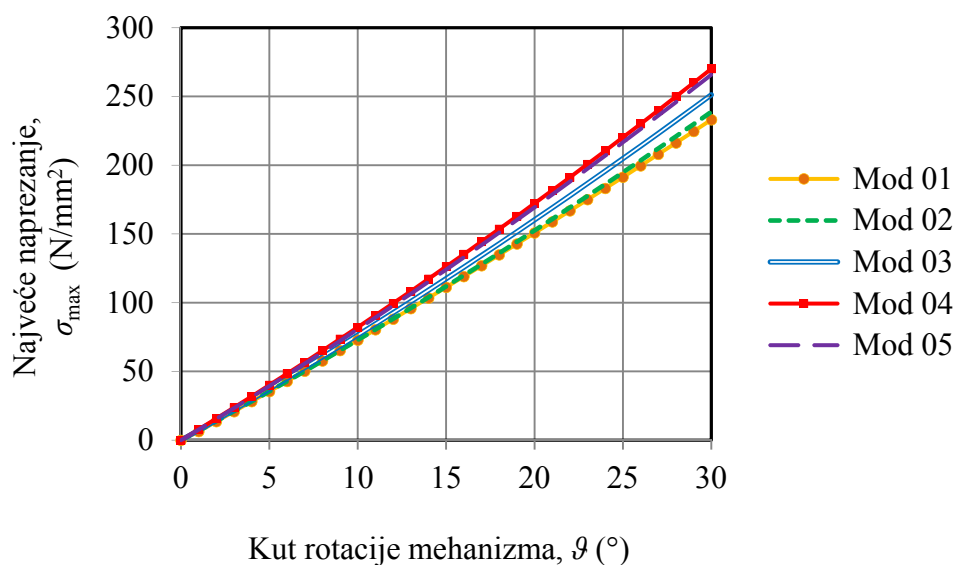
Na Slici 8.18 prikazana je ovisnost faze parazitnog pomaka o kutu rotacije ϑ za različite kombinacije kutova γ_1 i γ_2 .



Slika 8.18 Ovisnost faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma ϑ i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga

Vidljivo je tu da je promjena faze parazitnog pomaka u ovisnosti o kutu ϑ gotovo linearna te se ne uočavaju značajnija odstupanja rezultata kod modela koji svi imaju vrijednost kuta $\gamma_1 = 0^\circ$. Za razliku od rotacijskog mehanizma s ravnim lisnatim oprugama kod kojeg faza parazitnog pomaka linearno raste s porastom kuta ϑ od minimalne vrijednosti $\varphi = 0^\circ$, kod mehanizma s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću, faza parazitnog pomaka se s porastom kuta ϑ gotovo linearno smanjuje od maksimalne vrijednosti $\varphi = 90^\circ$, što govori da je u ovom slučaju početni parazitni pomak horizontalan.

Na Slici 8.19 prikazana je konačno i ovisnost najvećeg naprezanja u uklještenju o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite kombinacije kutova γ_1 i γ_2 .



Slika 8.19 Ovisnost najvećeg naprezanja o kutu rotacije mehanizma ϑ i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga

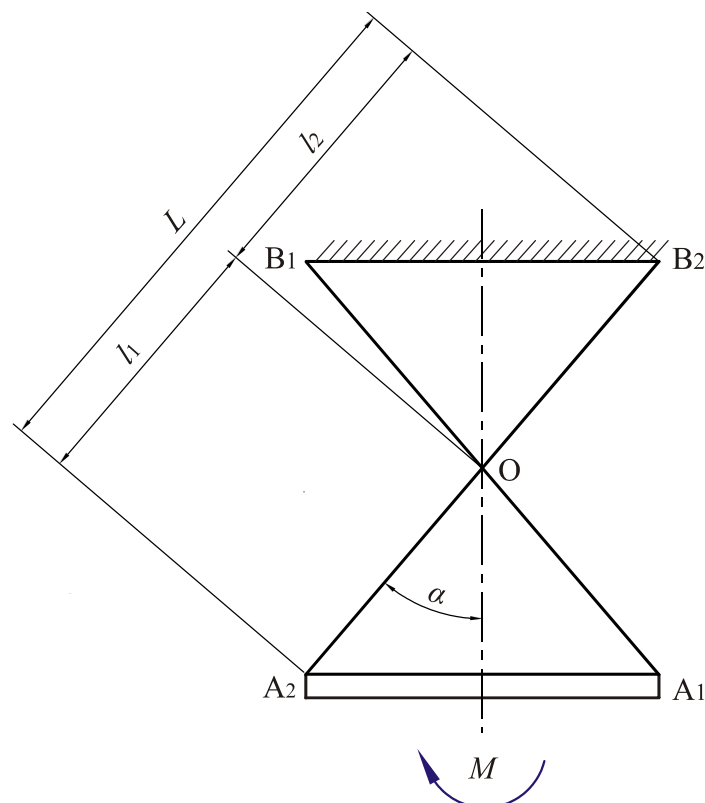
Ovisnost najvećeg naprezanja o kutu rotacije za sve analizirane modele je gotovo linearna, a najveća se naprezanja u uklještenjima javljaju kod izvedbi kod kojih je $\gamma_2 = 60^\circ$. Naprezanja su cca. 20% veća nego kod izvedbe mehanizma s ravnim lisnatim oprugama. I u referenci [Hildebrand, 1958] autor analizira ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću. Pritom je, međutim, početna zakrivljenost lisnatih opruga postignuta montažom, odnosno lisnate su opruge deformirane i u deformiranom položaju spregnute u rubnim točkama. Posljedično, lisnate opruge montirane na ovaj način su prednapregnute ali je vrlo teško kontrolirati razinu stvarno postignutih naprezanja u oprugama. U istom su radu provedena i eksperimentalna mjerenja na dva modela koji su definirani kutovima $\gamma_1 = 15^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$ i $\gamma_1 = 0^\circ$, $\gamma_2 = 45^\circ$. Zaključeno je da veću rotacijsku

krutost i manje parazitne pomake ima model koji je definiran s kutovima $\gamma_1 = 0^\circ$, $\gamma_2 = 45^\circ$. Kod ovdje analizirane izvedbe rotacijskog podatljivog mehanizma (s neprednapregnutim lisnatim oprugama), usporedbom modela definiranih s tim kutovima (Mod 03 i Mod 05) nije pak uočena značajna razlika rotacijske krutosti između njih, dok su parazitni pomaci modela Mod 05 nešto manji nego modela Mod 03.

8.4 Naprezanja i deformacije monolitne izvedbe rotacijskog podatljivog mehanizma

Kao što je već spomenuto u drugoj cjelini disertacije, rotacijski podatljivi mehanizam kod kojeg podatljivi elementi nisu mimosmjerni, već su spojeni uzduž geometrijske osi, naziva se monolitni rotacijski podatljivi mehanizam (Slika 2.8b).

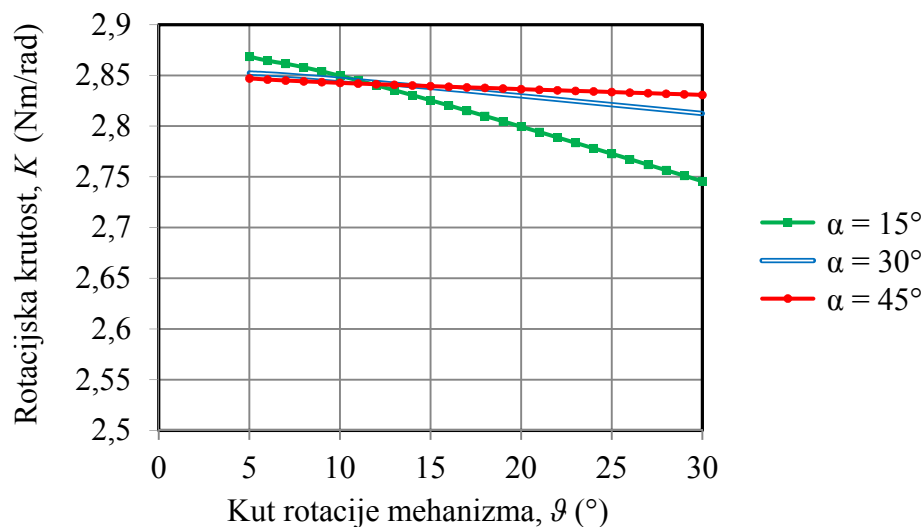
Metodom konačnih elemenata analizirano je i ponašanje konstrukcijske konfiguracije monolitnog rotacijskog podatljivog mehanizma opterećenog kako je prikazano na Slici 8.20 s geometrijom poprečnog presjeka lisnatih opruga $b = 15$ mm, $t = 0,5$ mm i $l_1 = l_2 = 57,5$ mm.



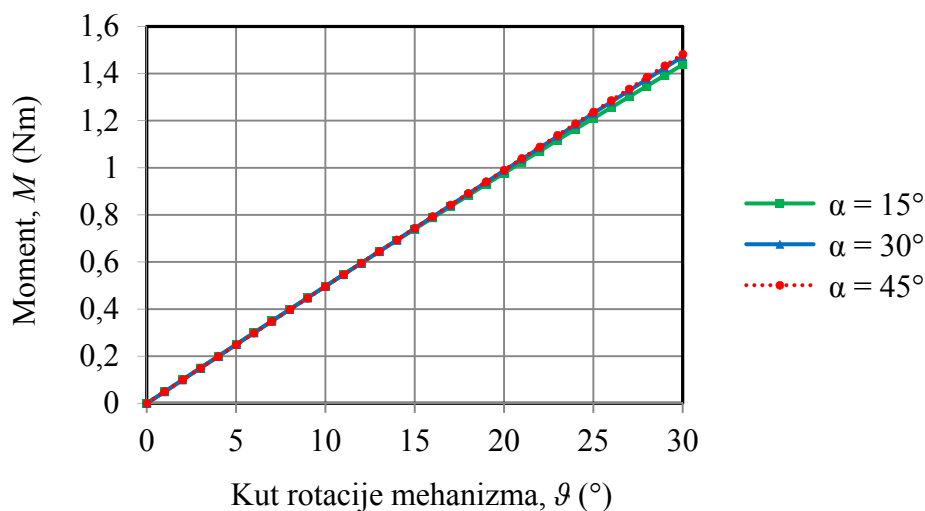
Slika 8.20 Monolitni rotacijski podatljivi mehanizam

Na Slici 8.21 prikazana je rotacijska krutost takvog mehanizma u ovisnosti o kutu rotacije ϑ , a za različite kutove α . Vidljivo je da rotacijska krutost mehanizma blago pada s porastom

kuta ϑ . Najveće odstupanje vrijednosti rotacijske krutosti dobiva se pri najvećem razmatranom kutu $\vartheta = 30^\circ$ pa odstupanje rotacijske krutosti između mehanizma s $\alpha = 15^\circ$ i onoga s $\alpha = 45^\circ$ u tom slučaju iznosi 3,1%. S druge je pak strane ta krutost gotovo 4 puta veća od rotacijske krutosti mehanizma iste geometrije kod kojega su lisnate opruge mimosmjerne jer 'prisilno' sprezanje opruga dovodi do rasta napreznjanja koje se u njima javlja (cf. i Sliku 8.24). Može se pak zaključiti da kod monolitnih rotacijskih podatljivih mehanizama utjecaj kuta α na rotacijsku krutost nije značajan. Shodno tome nije značajan utjecaj kuta α niti na moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma. Ovisnost potrebnog momenta o kutu rotacije mehanizma prikazana je na Slici 8.22.

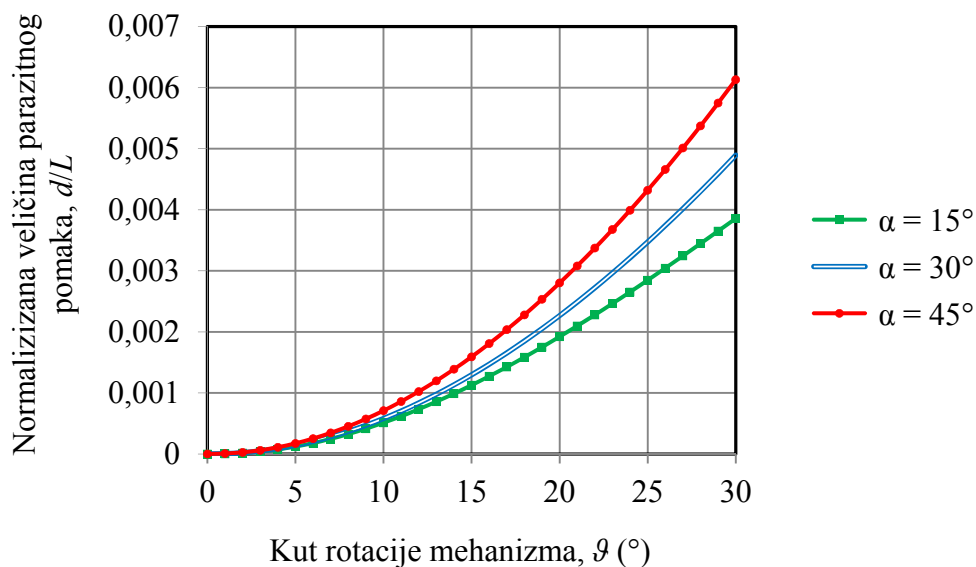


Slika 8.21 Ovisnost rotacijske krutosti monolitnog podatljivog mehanizma o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite α



Slika 8.22 Ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ o tom kutu za različite kutove α

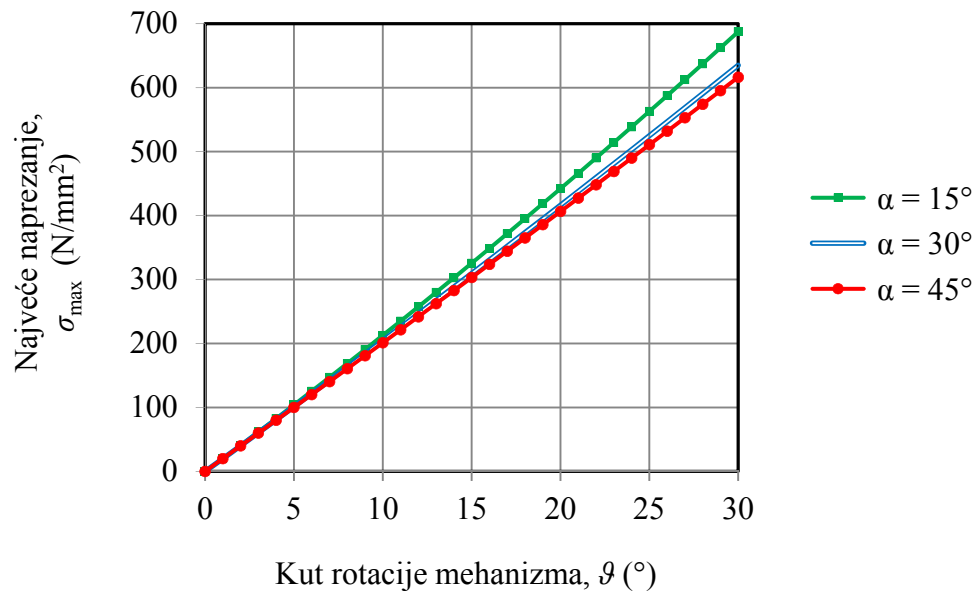
Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu ϑ prikazana je na Slici 8.23. Vidljivo je da njezina vrijednost eksponencijalno raste s porastom i kuta rotacije mehanizma ϑ kao i kuta α . Usporedbom rezultata dobivenih za normaliziranu veličinu parazitnog pomaka za monolitnu konfiguraciju rotacijskog podatljivog mehanizma s rezultatima kada su lisnate opruge mimosmjerne (cf. Slika 8.1) zaključuje se da su kod monolitne izvedbe parazitni pomaci znatno manji. Tako je pri kutu rotacije $\vartheta = 30^\circ$ i kutovima lisnatih opruga prema vertikali od 15° , 30° i 45° parazitni pomak kod monolitne konfiguracije redom manji 6,08; 5,32 i 5,14 puta.



Slika 8.23 Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije ϑ za različite kutove α

Analizom faze parazitnog pomaka utvrđeno je pak da i za monolitne rotacijske podatljive mehanizme vrijedi izraz (3.123), odnosno da faza parazitnog pomaka ne ovisi o kutu α .

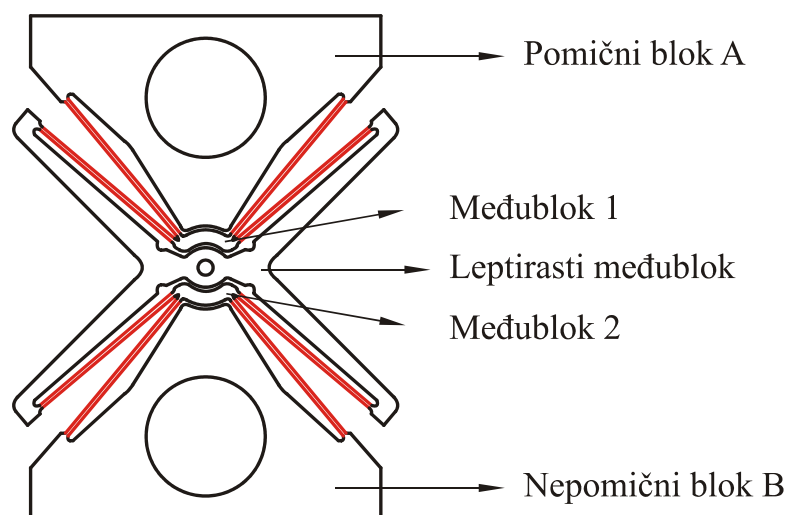
Najveće naprezanje u uklještenju u ovisnosti o kutu ϑ , a za različite kutove α prikazana je na Slici 8.24. Najveće naprezanje gotovo linearno raste s porastom kuta rotacije ϑ . Za određeni kut ϑ naprezanje je to veće što je kut α manji. Pri najvećem razmatranom kutu rotacije $\vartheta = 30^\circ$, razlika vrijednosti najvećeg napreznja u monolitnom rotacijskom podatljivom mehanizmu za kutove $\alpha = 15^\circ$ i $\alpha = 45^\circ$ iznosi tako cca. 10%. Već je spomenuto da 'prisilno' sprezanje opruga, kod monolitne konfiguracije, dovodi do rasta napreznja koje se u njima javlja pa je tako pri kutu rotacije mehanizma $\vartheta = 30^\circ$ i kutovima lisnatih opruga prema vertikali od 15° , 30° i 45° najveće naprezanje u odnosu na izvedbu s mimosmjernim oprugama redom veće 4,46; 3,73 i 3,35 puta.



Slika 8.24 Ovisnost najvećeg napreznja o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite kutove α

U radu je analizirana i konstrukcijska izvedba monolitnog rotacijskog mehanizma u literaturi označena kao 'leptirasti mehanizam' prikazan na Slici 2.11b [Henein et al., 2003]. Iako je u literaturi maksimalni razmatrani kut rotacije mehanizma iznosio $\vartheta = 15^\circ$, ovdje će se analizirati karakteristični parametri spomenutog mehanizma pri kutovima rotacije do $\vartheta = 30^\circ$. Leptirasti mehanizam opterećen je pritom momentom.

Na Slici 8.25 prikazan je analizirani model leptirastog mehanizma

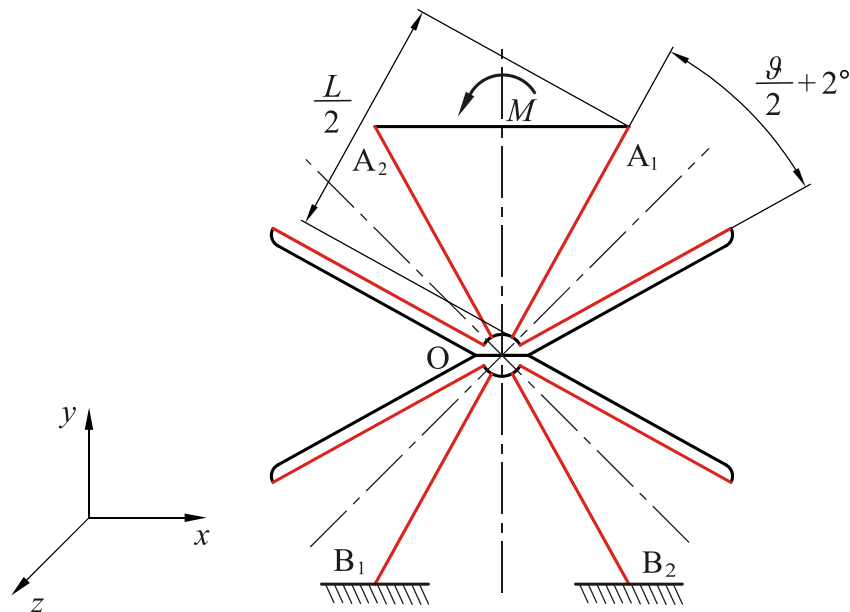


Slika 8.25 Model leptirastog mehanizma

Vidljivo je tu da se leptirasti podatljivi mehanizam sastoji iz pomičnog bloka, nepomičnog bloka, tri međubloka od kojih se središnji naziva leptirasti međublok te osam lisnatih opruga.

Lisnate su opruge spregnute kako je prikazano na slici te označene crvenom bojom.

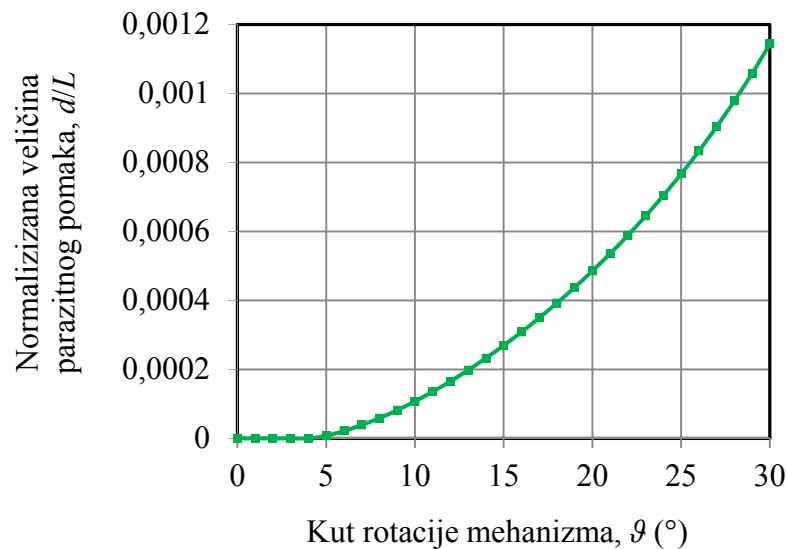
Metodom konačnih elemenata analizirano je ponašanje leptirastog rotacijskog podatljivog mehanizma s geometrijom poprečnog presjeka lisnatih opruga $b = 15$ mm, $t = 0,5$ mm i $L/2 = 57,5$ mm. Na Slici 8.26 prikazan je model leptirastog mehanizma kod kojega su pomični blok A i međublokovi, da bi se osigurala njihova krutost, zamijenjeni gredama kojima je pridijeljen model materijala s izrazito visokim modulom elastičnosti ($E = 10^{12}$ N/mm²).



Slika 8.26 Model leptirastog mehanizma kojem su međublokovi zamijenjeni gredama

Kao što je vidljivo na Slici 8.26, da prilikom rotacije mehanizma ne bi došlo do dodira susjednih lisnatih opruga prije postizanja željenog kuta rotacije mehanizma ϑ , usvaja se da kut između susjednih lisnatih opruga iznosi $\vartheta/2 + 2^\circ$.

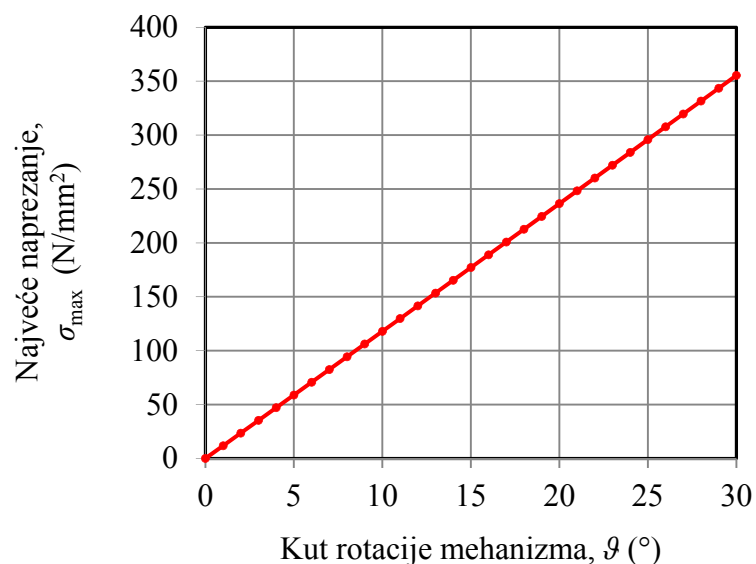
Na Slici 8.27 prikazana je ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka leptirastog podatljivog mehanizma o kutu rotacije mehanizma ϑ . Vidljivo je da normalizirana veličina parazitnog pomaka eksponencijalno raste s porastom kuta rotacije mehanizma ϑ . Usporedbom rezultata dobivenih za normaliziranu veličinu parazitnog pomaka za leptirastu konfiguraciju rotacijskog podatljivog mehanizma s rezultatima prethodno analizirane konvencionalne monolitne konfiguracije, može se zaključiti da su kod leptiraste izvedbe parazitni pomaci znatno manji i to za više od 4 puta. Usporedbom pak s rezultatima kada su lisnate opruge mimosmjerne (cf. Sliku 8.1) zaključuje se da su kod leptiraste izvedbe parazitni pomaci manji i za više od 20 puta.



Slika 8.27 Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije ϑ za leptirasti mehanizam

Analizom faze parazitnog pomaka utvrđeno je da i za leptiraste rotacijske podatljive mehanizme vrijedi izraz (3.123), odnosno da faza parazitnog pomaka ne ovisi o kutu α .

Najveće naprezanje u uklještenju leptirastog mehanizma u ovisnosti o kutu ϑ za različite kutove α , prikazano je na Slici 8.28.



Slika 8.28 Ovisnost najvećeg naprezanja o kutu rotacije mehanizma ϑ za leptirasti podatljivi mehanizma

Najveće naprezanje gotovo linearno raste s porastom kuta rotacije ϑ . Kod leptiraste konfiguracije 'prisilno' sprezanje opruga, fizikalno analogno kao kod konvencionalne

monolitne izvedbe, dovodi do porasta naprezanja koje se u njima javlja ali je ukupno naprezanje pri istim kutovima rotacije kod leptirastog mehanizma ipak značajno manje nego kod konvencionalne monolitne izvedbe. Tako je pri kutu rotacije mehanizma od $\vartheta = 30^\circ$ najveće naprezanje u odnosu na izvedbu s mimosmjernim oprugama veće za gotovo 2 puta, ali je i dalje znatno manje od granice tečenja za odabrani materijal lisnatih opruga. Može se dakle zaključiti da leptirasti rotacijski podatljivi mehanizam omogućava postizanje neznatnih parazitnih pomaka uz veći mogući raspon kutova rotacije od konvencionalnog monolitnog mehanizma. Veliki nedostatak leptiraste izvedbe je tehnološki zahtjevna (skupa) proizvodnja.

8.5 Naprezanja i deformacije mehanizama u ovisnosti o vrsti vanjskoga opterećenja

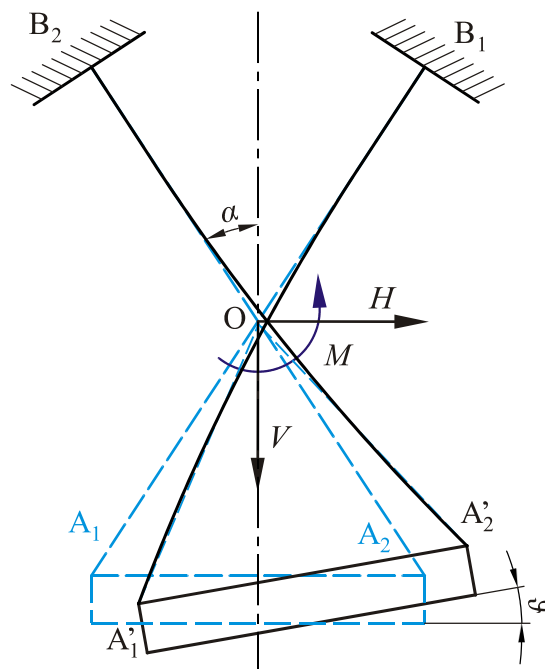
U dosadašnjoj su analizi metodom konačnih elemenata analizirani rotacijski podatljivi mehanizmi opterećeni samo momentom, a u ovom će dijelu biti opisana analiza rotacijskog mehanizma koji će, uz moment, biti opterećen i silama.

Već je ranije rečeno da na stabilnost rotacijskog podatljivog mehanizma uvelike utječe djelovanje vanjskih sila, a da se kod simetričnog rotacijskog podatljivog mehanizma opterećenog momentom ne pojavljuje nestabilnost. S obzirom da u praksi na rotacijski podatljivi mehanizam uz moment djeluju i sile, napravljena je analiza utjecaja kombinacije opterećenja na stabilnost mehanizma.

U radovima [Wittrick, 1951], [Zelenika, De Bona, 2002], [Hongzhe, Shusheng, 2010. II] te [Goncalves et al., 2014] analiziran je utjecaj djelovanja vertikalne sile i momenta na parazitne pomake rotacijskog podatljivog mehanizama. Analiza je pokazala da se pod djelovanjem vlačne vertikalne sile parazitni pomaci povećavaju dok se djelovanjem tlačne vertikalne sile ti pomaci smanjuju. Kako bi se provjerila točnost predložene metode izračuna rotacijskih podatljivih mehanizama temeljene na metodi približne zakrivljenosti, u radu [Zelenika, De Bona, 2002] opisana su i eksperimentalna mjerenja kojima je analiziran utjecaj djelovanja momenta i dodatnih vertikalnih sila na parazitne pomake mehanizma. Eksperimentalna mjerenja pokazala su da predložena metoda daje zadovoljavajuću kvalitativnu sliku, ali uz poprilična odstupanja u vrijednostima samih pomaka te velike računske komplikacije [Zelenika, De Bona, 2002]. U radovima [Wittrick, 1948] te [Haringx, 1949] primjenom metode približne zakrivljenosti analiziran je utjecaj opterećenja na rotacijsku krutost podatljivog mehanizma kada konstrukcijski parametar λ iznosi $\lambda = 0,5$. Utvrđeno je da se

djelovanjem tlačne vertikalne sile rotacijska krutost mehanizma može povećati i više od tri puta. Također je utvrđeno da je sa stajališta stabilnosti mehanizma povoljnije rotacijski podatljivi mehanizam opteretiti tlačnom vertikalnom silom nego vlačnom. Analiza je proširena u referencama [Wittrick, 1951] te [Goncalves et al., 2014] gdje je, također primjenom metode približne zakrivljenosti, analiziran utjecaj opterećenja uz promjenu vrijednosti konstrukcijskog parametra λ , a u radu [Goncalves et al., 2014] provedena je i analiza metodom konačnih elemenata. Analizama je pokazano da je utjecaj parametra λ na rotacijsku krutost mehanizma vrlo značajan kada je mehanizam uz moment opterećen i vertikalnom silom. U radu [Goncalves et al., 2014] analizirana je rotacijska krutost za vrijednosti parametra λ pri minimalnim parazitnim pomacima (gdje je pretpostavljeno da je optimalna vrijednost analiziranog parametra $\lambda = 0,1277$). U referenci [Wittrick, 1951] definirano je područje stabilnosti rotacijskog podatljivog mehanizma kada konstrukcijski parametar λ iznosi, redom, $\lambda = 0,5$; $0,127$ i 0 . Utvrđeno je da se, ovisno o opterećenju rotacijskog podatljivog mehanizma, promjenom parametra λ značajno utječe na varijabilnost rotacijske krutosti.

Analiziran je utjecaj vanjskih sila na rotacijsku krutost podatljivog mehanizma opterećenog kao što je prikazano na Slici 8.29. Lisnate opruge sijeku se na sredini aktivnih duljina.



Slika 8.29 Rotacijski podatljivi mehanizam opterećen momentom i silama kroz geometrijsko središte

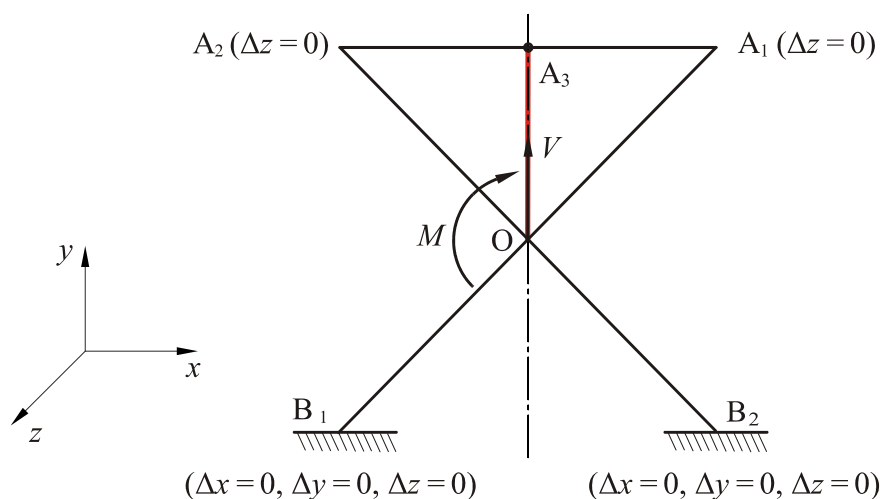
Geometrija lisnatih opruga definirana je njihovom širinom $b = 30$ mm, debljinom $t = 0,5$ mm i

duljinom $L = 115$ mm. Pri analizi nije uzeta u obzir horizontalna sila H jer je njen utjecaj fizikalno ekvivalentan već prisutnom momentu (ti se utjecaji fizikalno superponiraju).

Kako bi se utvrdio utjecaj djelovanja vertikalne sile na rotacijsku krutost, parazitne pomake i naprezanja provedene su sljedeće analize:

- analiza utjecaja djelovanja kombinacije vertikalne tlačne sile i momenta,
- analiza utjecaja djelovanja kombinacije vertikalne vlačne sile i momenta.

U provedenoj se analizi pretpostavlja da vertikalna sila i moment djeluju u geometrijskom središtu O rotacijskog mehanizma. Na Slici 8.30 prikazana je konzolna greda $\overline{OA_3}$ na čijem slobodnom kraju O djeluju moment i vertikalna sila, te 'prenosi' opterećenje na kruto tijelo A . Rubni uvjeti su postavljeni kao što je već pojašnjeno u šestoj cjelini. Kako bi se osigurala krutost tijela A , model materijala definiran je s izrazito visokim modulom elastičnosti ($E = 10^{12}$ N/mm²) i pridijeljen gredi $\overline{OA_3}$ i krutom tijelu A .



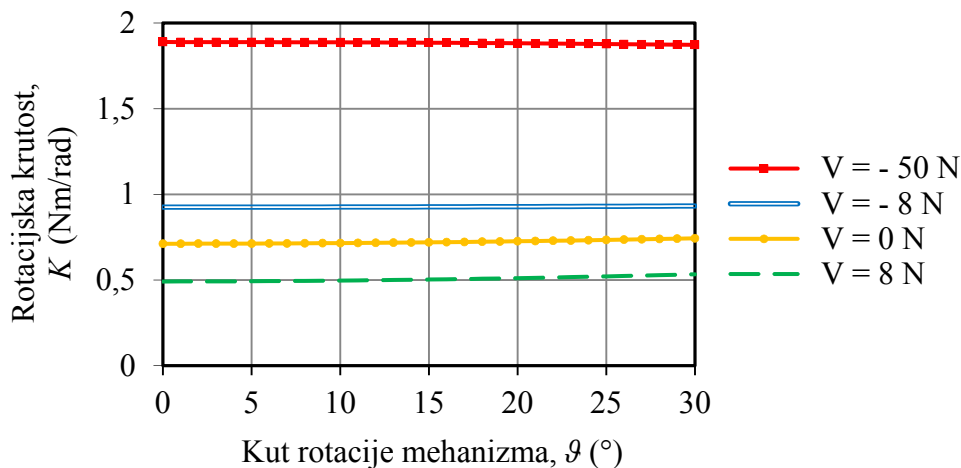
Slika 8.30 Opterećenje i rubni uvjeti modela rotacijskog podatljivog mehanizma opterećenog silom i momentom

Opterećivanje modela mehanizma provedeno je u dva koraka:

- U prvom je koraku, kako bi se osigurala konvergencija i čim veća točnost rezultata, mehanizam opterećen samo vertikalnom silom, a samo uvođenje sile provedeno je u 10 podkoraka.
- U drugom koraku, kada na model mehanizma već djeluje vertikalna sila u punom iznosu, postepeno se uvodi i moment. Broj podkoraka određuje se za svaki analizirani model zasebno, a ovisno o očekivanom momentu koji dovodi do nestabilnosti rotacijskog podatljivog mehanizma. Spomenute vrijednosti momenta procjenjuju se

iskustveno na osnovu velikog broja prethodno provedenih analiza pri izradi doktorske disertacije.

Na Slici 8.31 prikan je utjecaj vertikalnih sila na rotacijsku krutost mehanizma. Analize su provedene za vlačnu vertikalnu silu $V = 8 \text{ N}$ i tlačne vertikalne sile $V = -8 \text{ N}$ i $V = -50 \text{ N}$. Kut lisnatih opruga prema vertikali iznosio je $\alpha = 45^\circ$.



Slika 8.31 Ovisnost rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite vrijednosti vertikalne sile

Pri analizi se vodilo računa da pri rotaciji krutog tijela A dolazi do pomaka geometrijskog središta mehanizma O. To znači da vertikalna sila s rezultirajućim krakom uzrokuje moment koji iznosi

$$\Delta M = V \Delta x_O \quad (8.4)$$

gdje je Δx_O pomak točke O u smjeru osi x . Rotacijska se krutost, stoga, mora računati s korigiranom vrijednošću momenta koja iznosi

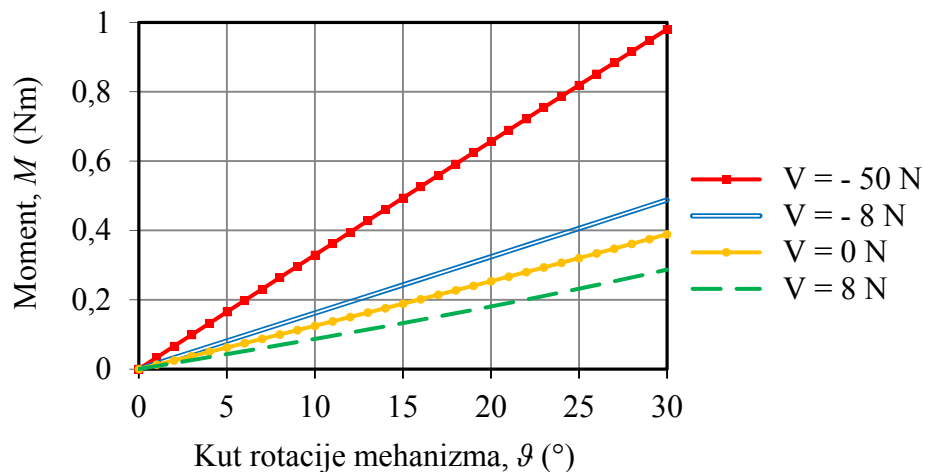
$$M_{\text{kor}} = M \pm \Delta M \quad (8.5)$$

Pri izračunu korigirane vrijednosti momenta primjenom izraza (8.5) treba voditi računa i o predznaku, odnosno da li vertikalna sila utječe na njegovo povećanje ili smanjenje.

Iz Slike 8.31 vidljiv je vrlo značajan utjecaj vertikalne sile na rotacijsku krutost mehanizma. Naime, u usporedbi kada na rotacijski mehanizam djeluje samo moment, djelovanjem vlačne vertikalne sile na mehanizam rotacijska se krutost smanjuje, dok se djelovanjem tlačne vertikalne sile ona povećava. Isto tako, rotacijska krutost ovisi i o kutu rotacije ϑ , međutim ta ovisnost nije značajna. Analizom metodom konačnih elemenata utvrđeno je da, kada na

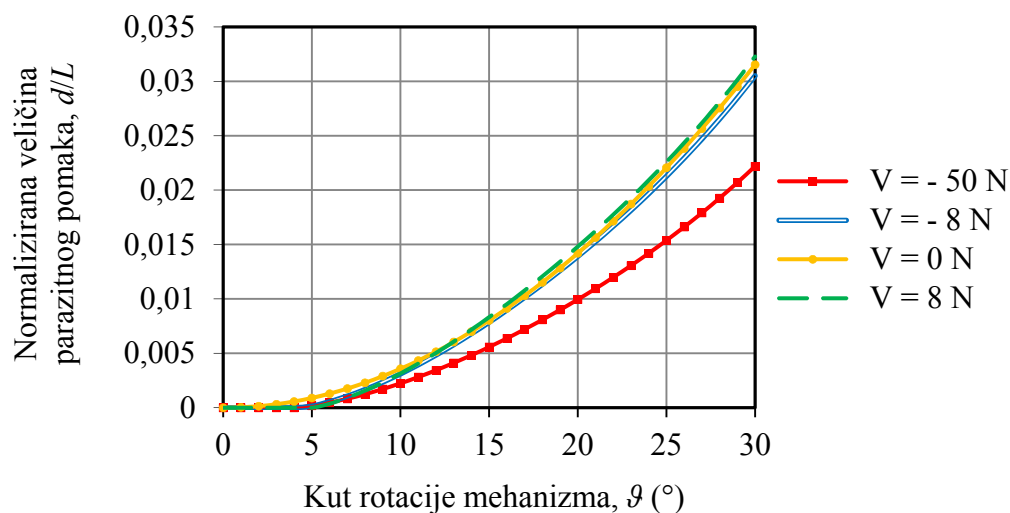
mehanizam djeluje vlačna vertikalna sila, rotacijska krutost blago raste s porastom kuta ϑ . Postepenim smanjivanjem vlačne sile i prelaskom u područje u kojem djeluje tlačna sila, s porastom vrijednosti tlačne sile raste i rotacijska krutost, ali ujedno (za određenu vrijednost tlačne sile) krutost blago pada s porastom kuta ϑ .

Na Slici 8.32 prikazana je ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ o tom kutu. Kako rotacijska krutost raste s porastom kuta ϑ , istovremeno raste i potrebni moment.



Slika 8.32 Ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije ϑ o tom kutu za različite vrijednosti vertikalnih sila

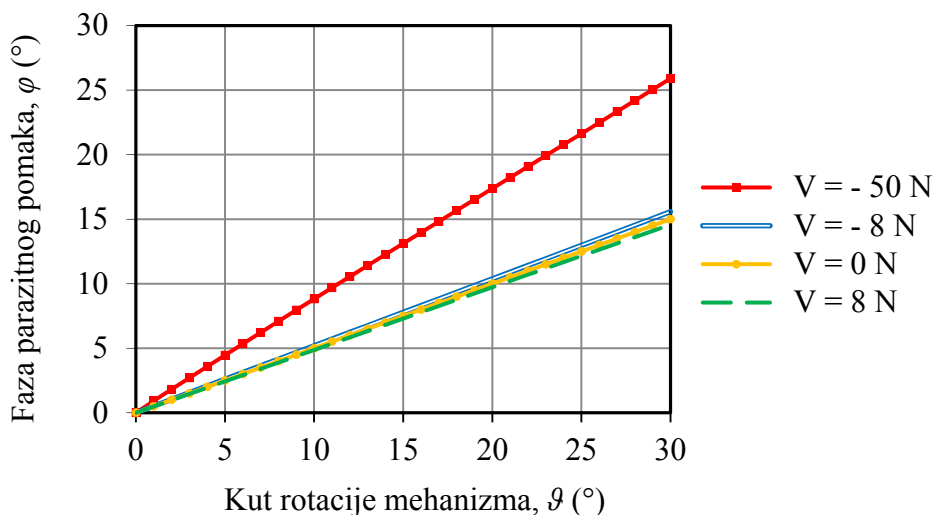
Na Slici 8.33 je pak prikazan utjecaj vertikalnih sila na normaliziranu veličinu parazitnog pomaka.



Slika 8.33 Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite vrijednosti vertikalnih sila

Djelovanje vlačne vertikalne sile povećava neželjene parazitne pomake, dok ih tlačne sile smanjuju. S porastom tlačne sile parazitni pomaci sporije rastu s rastom kuta rotacije ϑ .

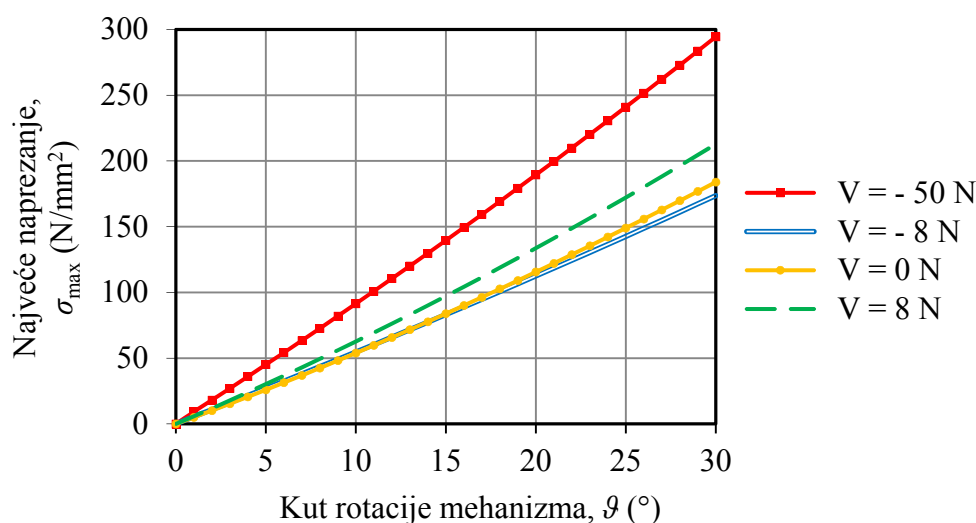
Prikaz ovisnosti faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma dan je na Slici 8.34.



Slika 8.34 Ovisnost faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite vrijednosti vertikalne sile

Rast faze parazitnog pomaka za sve je vrijednosti vertikalnih sila linearan u cijelom području kuta rotacije ϑ . U odnosu na slučaj opterećenja kada na mehanizam djeluje samo moment, djelovanjem vlačne vertikalne sile, s porastom kuta rotacije faza parazitnog pomaka raste sporije, a djelovanjem tlačne sile faza raste brže.

Utjecaj vertikalnih sila na najveća naprezanja u uklještenjima prikazan je na Slici 8.35.

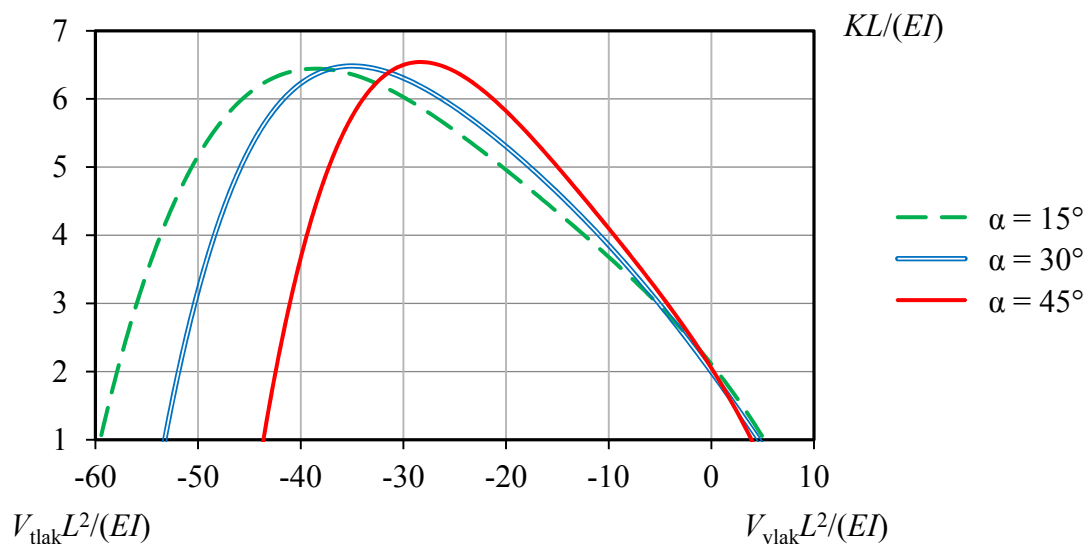


Slika 8.35 Ovisnost najvećih naprezanja o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite vrijednosti vertikalne sile

Vidljiva je promjena najvećih naprezanja ovisno o kutu rotacije mehanizma ϑ te za različite vrijednosti vertikalnih sila.

Već je u ranijim analizama spomenuto da djelovanje samo momenta na rotacijski podatljivi mehanizam uzrokuje najveće naprezanje u uklještenju lisnatih opruga. Ovom je analizom utvrđeno da kombinacija djelovanja tlačne vertikalne sile i momenta može izazvati najveće naprezanje koje se ne nalazi u uklještenju, ali je najveće ekvivalentno naprezanje i dalje, i za najveće razmatrane kutove rotacije mehanizma, puno manje od granice tečenja materijala opruga.

Nakon što je utvrđeno kako vertikalne sile utječu na ponašanje tretiranih mehanizama, provedena je i analiza njihovog utjecaja na stabilnost. U dostupnoj je literaturi pronađen dijagram prikazan na Slici 4.6 dobiven analitičkim izračunom opisanim u cjelini 4.1 kojim je definirana stabilnost mehanizama kod kojih je $\alpha = 45^\circ$ [Wittrick, 1948]. Vrijednosti na tom dijagramu su, kako je već rečeno, dobivene rješavanjem približne jednadžbe zakrivljenosti elastične linije lisnate opruge. Zato je u doktorskoj disertaciji provedena opsežnija analiza stabilnosti rotacijskih podatljivih mehanizama s prethodno definiranom geometrijom lisnatih opruga za različite kutove α lisnatih opruga prema vertikalnoj osi. Analiza je uključivala i geometrijske nelinearnosti (velike deformacije opruga). Pa su tako analizirani mehanizmi s kutovima $\alpha = 15^\circ, 30^\circ$ i 45° , a rezultati analize prikazani su na Slici 8.36.



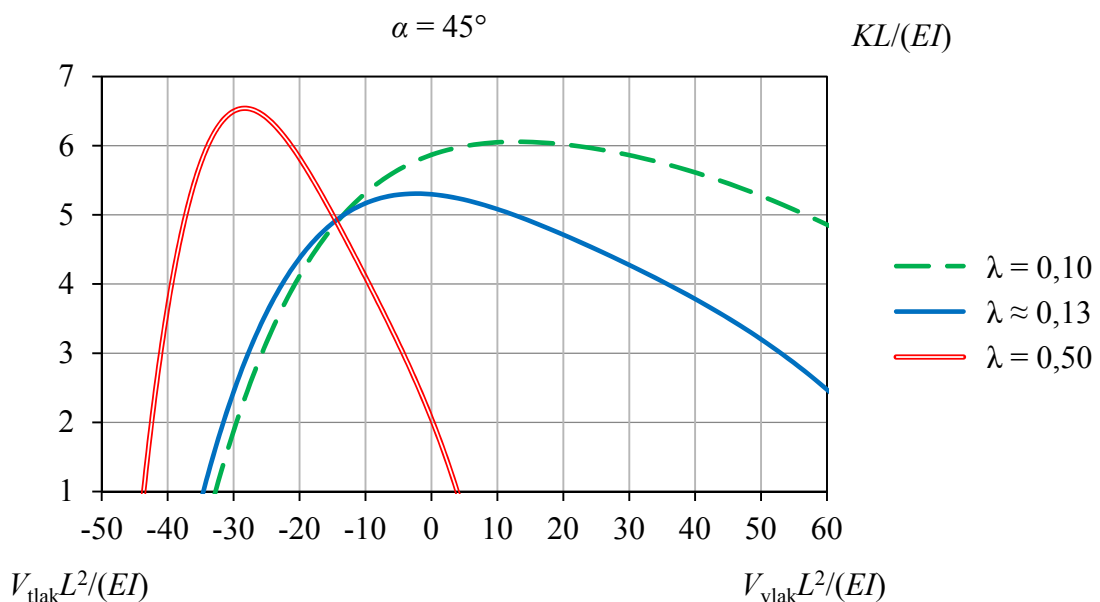
Slika 8.36 Rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama u ovisnosti o vlačnoj sili koja djeluje na mehanizam

Na Slici 8.36 sve su vrijednosti dane u bezdimenzijskom obliku. Vidljivo je da se vertikalnom silom uvelike utječe na rotacijsku krutost mehanizma, te da se već djelovanjem male vlačne

sile na mehanizam može doći u nestabilno područje. Zaključeno je da je pri vrijednosti konstrukcijskog parametra $\lambda = 0,5$, sa stajališta stabilnosti mehanizma pogodnije djelovanje kombinacije opterećenja vertikalne tlačne sile i momenta od kombinacije vertikalne vlačne sile i momenta. U ovisnosti o vrijednosti kuta nagiba opruga α , za određenu se bezdimenzijsku vrijednost $V_{\text{tlak}}L^2/(EI)$ rotacijska krutost mehanizma može povećati više od šest puta. Isto tako smanjivanjem kuta α rotacijski se mehanizam može opteretiti većom tlačnom silom i još uvijek ostati stabilan.

Kao što je vidljivo na Slici 8.31, ako je rotacijski podatljivi mehanizam u uporabi opterećen konstantnom vertikalnom silom i momentom ili samo momentom, njegova je rotacijska krutost tijekom rotacije gotovo konstantna, što znači da linearan rast momenta uzrokuje gotovo linearan rast kuta rotacije ϑ . Međutim, s obzirom da rotacijska krutost uvelike ovisi o iznosu sile koja ga opterećuje, u slučaju da na mehanizam djeluje promjenjiva vertikalna sila, teško je osigurati miran i kontinuirani rad rotacijskog podatljivog mehanizma, jer kut rotacije ϑ tada više ne raste linearno s porastom momenta.

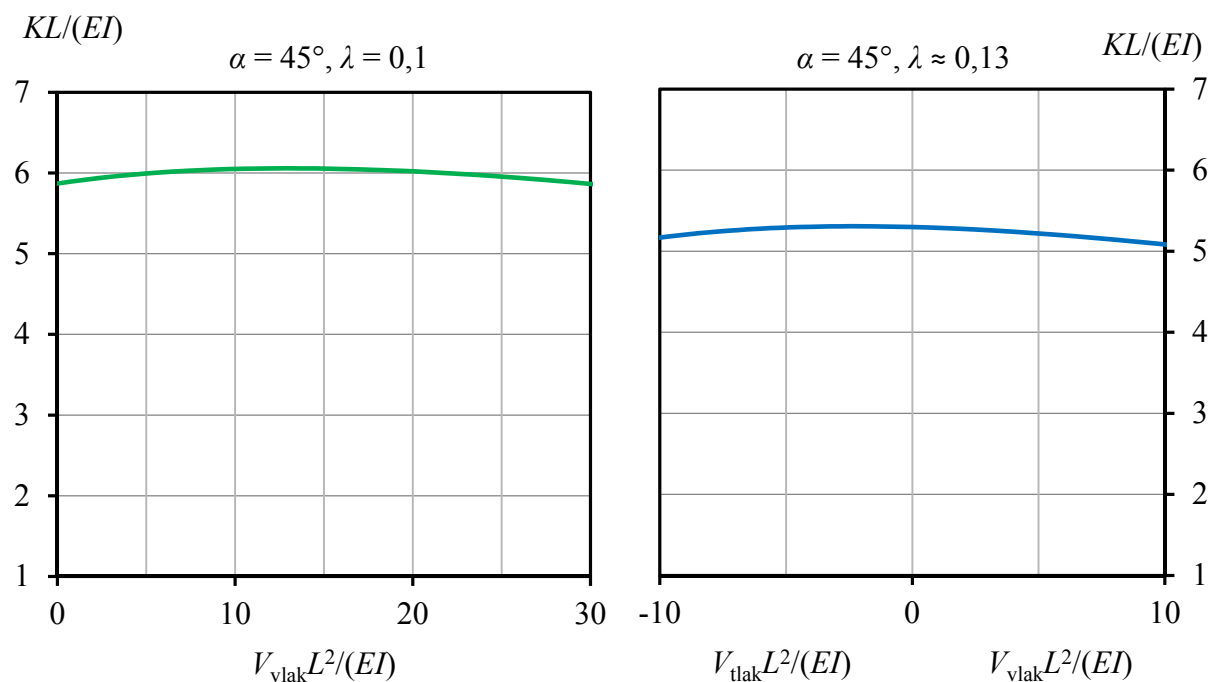
Da bi se iznašlo konstrukcijsko rješenje koje ima minimalne parazitne pomake uz minimalnu promjenu rotacijske krutosti analiziran je model mehanizma s varijabilnim konstrukcijskim parametrom λ pri kutu nagiba opruga $\alpha = 45^\circ$. Rezultati takve analize prikazani su na Slici 8.37.



Slika 8.37 Rotacijska krutost u ovisnosti o vlačnoj sili koja djeluje na mehanizam za različite vrijednosti parametra λ

Na slici se uočava vrlo značajan utjecaj položaja točke presjecišta opruga na promjenu rotacijske krutosti, odnosno da se smanjivanjem parametra λ smanjila i promjena rotacijske krutosti, te se time osigurava veća stabilnost rotacijskog mehanizma. Čak štoviše, smanjenjem vrijednosti parametra λ u odnosu na vrijednost $\lambda \approx 0,13$ koja pri $\alpha = 45^\circ$ jamči minimalne parazitarne pomake, varijabilnost rotacijske krutosti se dodatno smanjuje.

Preglednosti radi na Slici 8.38 prikazana je ovisnost bezdimenzijske rotacijske krutosti o promjeni opterećenja i to za onaj raspon za koji je promjena rotacijske krutosti minimalna.



Slika 8.38 Rotacijska krutost u ovisnosti o vertikalnoj sili koja djeluje na mehanizam za vrijednosti geometrijskog parametra $\lambda = 0,1$ i $\lambda \approx 0,13$

U slučaju da na mehanizam djeluje vlačna vertikalna sila s bezdimenzijskom vrijednošću $V_{\text{vlak}} L^2/(EI) \leq 30$, a za geometrijski parametar $\lambda = 0,1$, mala je promjena rotacijske krutosti. Mehanizam s parametrom $\lambda \approx 0,13$ ima malu promjenu rotacijske krutosti na nešto užem području od $|V_{\text{vlak, tlak}} L^2/(EI)| \leq 10$. Međutim prednost je ove konstrukcijske konfiguracije u tome što se može opteretiti izmjeničnim opterećenjem uz, istovremeno, neznatne parazitarne pomake.

Kako je već navedeno, slična analiza utjecaja parametara λ i kombinacije opterećenja provedena je i, primjenom metode približne zakrivljenosti, u referenci [Wittrick, 1951], ali su metodom konačnih elemenata u disertaciji dobiveni točniji rezultati jer je metodom konačnih elemenata, za razliku od metode približne zakrivljenosti, moguće uzeti u obzir nelinearnosti

uzrokovane velikim kutovima rotacije mehanizma.

8.6 Analiza dobivenih rezultata

Rotacijski podatljivi mehanizmi su, zbog prednosti navedenih u 2. poglavlju doktorske disertacije, uvijek povoljno rješenje za konstrukcijsko osiguravanje točnog, jeftinog i pouzdanog rotacijskog zgloba. Ipak, kada je potrebno osigurati ultravisoke točnosti i preciznosti i pri većim kutovima rotacije mehanizma, njihova analiza postaje zahtjevnija, a rezultati dobiveni u 3., 4., 6. i 7. poglavlju disertacije pokazuju da je tada njihovo ponašanje moguće na primjeren način opisati samo proračunski zahtjevnom iterativnom procedurom temeljenom na *Elastica* metodi ili nelinearnom analizom metodom konačnih elemenata. Štoviše, metoda konačnih elemenata omogućava i detaljniju analizu ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama i u različitim konstrukcijskim konfiguracijama analiziranim u 8. poglavlju, čime je moguće utvrditi utjecaj konstrukcijskih parametara analiziranih mehanizama ne samo na parazitne pomake koji definiraju točnosti i preciznost rotacije mehanizama, nego i na varijabilnost rotacijske krutosti, te na stabilnost i čvrstoću mehanizama. Provedenom analizom utjecajnih čimbenika je stoga bilo moguće utvrditi da:

- pravilnim izborom materijala lisnatih opruga osigurava se njegova primjerena čvrstoća i pri najvećim razmatranim kutovima rotacije mehanizma ϑ ;
- promjena kuta nagiba lisnatih opruga α utječe na parazitne pomake na način da s porastom kuta α raste i normalizirana veličina parazitnog pomaka d/L ali α ne utječe na fazu parazitnog pomaka;
- porastom kuta α eksponencijalno raste rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma;
- pomicanjem točke presjecišta lisnatih opruga rotacijskog podatljivog mehanizma O, odnosno varijacijom konstrukcijskog parametra λ , se parazitni pomak može svesti na neznatnu vrijednost pa se, kod uobičajene konstrukcijske konfiguracije s $\alpha = 45^\circ$, za $\lambda \approx 0,13$ može dobiti neznatan (horizontalni) parazitni pomak i pri velikim kutovima rotacije mehanizma ϑ ;
- smanjenje parazitnog pomaka varijacijom konstrukcijskog parametra λ dobiva se, međutim, uz znatno (cca. 3 puta) povećanje rotacijske krutosti mehanizma i rezultirajućih naprežanja u uklještenju lisnatih opruga;

- porast početne zakrivljenosti lisnatih opruga, izražen razlikom kutova nagiba tangenti prema neutralnoj osi opruga u uklještenjima, uzrokuje porast rotacijske krutosti mehanizma, dok se kod kombinacije kutova $\gamma_1 = 15^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$ dobiva najmanji parazitni pomak;
- u cijelom analiziranom području parazitni pomaci rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću veći su nego kod izvedbe mehanizma s ravnim lisnatim oprugama što dovodi do rotacijske nepreciznosti uz cca. 20% veća naprezanja u uklještenjima te se ne preporuča njihova uporaba;
- monolitna izvedba rotacijskog podatljivog mehanizma dovodi do smanjenja veličine parazitnih pomaka za pet puta, ali po cijenu vrlo izraženog (četverostrukog) porasta rotacijske krutosti i najvećih naprezanja mehanizma u odnosu na konstrukcijsku konfiguraciju s mimosmjernim lisnatim oprugama i to uz vrlo mali utjecaj kuta α ;
- leptirasta konfiguracija rotacijskog podatljivog mehanizma, čija je izrada kompleksna i skupa, dodatno smanjuje parazitne pomake pa su oni i do 20 puta manji od parazitnih pomaka konstrukcijske konfiguracije s mimosmjernim lisnatim oprugama uz 2 puta manja naprezanja u uklještenjima u odnosu na konvencionalnu monolitnu izvedbu (što, dakle, omogućava postizanje većih raspona gibanja mehanizma);
- kada je rotacijski podatljivi mehanizam podvrgnut i djelovanju vertikalnih tlačnih sila, rotacijska se krutost povećava, a djelovanju vertikalnih vlačnih sila se smanjuje, mehanizam je stabilan u uskom području vrijednosti vertikalnih sila, posebice kada one vlačno opterećuju mehanizam, dok tlačne vertikalne sile mogu vrlo pozitivno utjecati na stabilnost mehanizma;
- vlačne vertikalne sile povećavaju pak parazitne pomake dok ih tlačne sile smanjuju uz istovremeni rast faze parazitnog pomaka i rast najvećih ekvivalentnih naprezanja u lisnatim oprugama;
- pokazuje se pritom da konstrukcijska konfiguracija s parametrom $\lambda \approx 0,13$ koja, pri $\alpha = 45^\circ$, jamči minimalne parazitne pomake, ima neznatnu varijaciju rotacijske krutosti u području vertikalnih sila različite orijentacije ako vrijedi $|V_{\text{vlak, tlak}} L^2 / (EI)| \leq 10$;
- pri vrijednosti konstrukcijskog parametrom $\lambda = 0,1$, kada na mehanizam djeluje vlačna vertikalna sila s bezdimenzijskom vrijednošću $V_{\text{vlak}} L^2 / (EI) \leq 30$ (mehanizam je, dakle, stabilniji u širem rasponu sila nego mehanizam s oprugama koje se sijeku na sredini

svojih duljina!), rotacijska krutost mehanizma ima vrlo malu varijabilnost a i parazitni pomaci su još uvijek vrlo mali;

- te stabilne konstrukcijske konfiguracije s minimiziranim parazitnim pomacima i vrlo malom varijabilnošću rotacijske krutosti postižu se, kako je istaknuto, ipak po cijenu rasta rotacijske krutosti mehanizma, odnosno porasta momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ pri čemu su najveća ekvivalentna naprezanja ipak još uvijek i za najveće razmatrane kutove rotacije mehanizama znatno niža od granice tečenja materijala lisnatih opruga.

Iz svega navedenoga razvidno je da će optimalna konstrukcijska konfiguracija uvijek biti ovisna o konkretnoj primjeni. Optimum će se, dakle, uvijek dobiti kao kompromis između rješenja koja dovode do poboljšanja nekih od karakteristika rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama uz istovremeno pogoršanje nekih drugih karakteristika. Monolitni mehanizam tako, primjerice, dovodi do naglašeno velikog smanjenja veličine parazitnih pomaka ali uz istovremeno povećanje rotacijske krutosti i naprezanja u oprugama što bi, pri većim kutovima rotacije mehanizma, moglo dovesti do ugrožavanja strukturne cjelovitosti mehanizma. Leptirasta konfiguracija dovodi do dodatnog smanjenja parazitnih pomaka, uz nešto manje povećanje ekvivalentnih naprezanja, ali je njihova izrada znatno složenija i skuplja. Ipak, rješenje s pomakom točke presjecišta lisnatih opruga na cca. 10–13% njihove duljine može i pri većim kutovima rotacije mehanizma omogućiti minimizaciju parazitnih pomaka uz istovremenu minimizaciju varijabilnosti rotacijske krutosti, osiguravanje stabilnosti mehanizma te zadržavanje naprezanja u oprugama na prihvatljivim razinama. Takvo rješenje će, dakle, biti zadovoljavajuće u vrlo širokom rasponu potencijalnih primjena rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama.

9 Zaključak

U doktorskoj disertaciji analiziraju se konstrukcijski parametri različitih konfiguracija rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama. Osnovni ciljevi koji se postavljaju pri konstruiranju takvih mehanizama su: što veća rotacijska preciznost i točnost, što manja varijabilnost rotacijske krutosti, stabilnost, jednostavnost konstrukcije i pouzdanost. S tim su ciljem analizirane i sintetizirane dosadašnje teorijske spoznaje i rezultati na području matematičkog i numeričkog modeliranja rotacijskih podatljivih mehanizama.

Budući da se razmatrani mehanizmi temelje na lisnatim oprugama, osnova predviđanja njihovog ponašanja je upravo analiza karakterističnih parametara lisnatih opruga. Definiranje karakterističnih parametara lisnatih opruga u području malih kutova rotacije mehanizama je relativno jednostavno, a i geometrijsko središte rotacije mehanizma se tada gotovo poklapa s točkom u kojoj se lisnate opruge križaju u neopterećenom položaju. Problem se, pak, komplicira povećanjem kutova rotacije mehanizma kada opruge ulaze u područje velikih (geometrijski nelinearnih) deformacija. Posljedično dolazi i do značajnijih pomaka geometrijskog središta rotacije mehanizama te veće varijacije rotacijske krutosti analizirane klase mehanizama.

Kako bi se provela analiza konstrukcijskih parametara simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama opterećenih momentom, u okviru doktorske disertacije razvijen je analitički model lisnatih opruga na polju velikih (geometrijski nelinearnih) deformacija primjenom tzv. *Elastica* metode. Taj je model i implementiran u programskom paketu MATLAB. Pristup *Elastica* metode pretpostavlja točno rješavanje diferencijalne

jednadžbe elastične linije što uključuje kompleksno rješavanje eliptičnih integrala uz korištenje iterativnih postupaka.

U disertaciji je razvijen i numerički model simetričnog rotacijskog mehanizma metodom konačnih elemenata u programskom paketu ANSYS. Rezultati dobiveni analizom metodom konačnih elemenata uspoređeni su s rezultatima eksperimentalnih mjerenja dostupnima u literaturi te je ostvareno vrlo dobra poklapanje rezultata. U cijelom razmatranom području rotacije mehanizma odstupanja veličine parazitnih pomaka dobivenih analizom metodom konačnih elemenata u odnosu na rezultate dobivene novijim visokopreciznim mjerenjima izvršenima uporabom laserske interferometrije iznose manje od 2 %. Rezultati analize metodom konačnih elemenata za fazu parazitnog pomaka u području su nepouzdanosti interferometrijskih mjerenja. Odstupanja rotacijske krutosti eksperimentalnih mjerenja i rezultata dobivenih metodom konačnih elemenata gdje je u analizi uzet u obzir antiklastični efekt iznose u cijelom razmatranom području rotacije mehanizma manje od 2,5 %. Na taj je način potvrđena primjenjivost metode konačnih elemenata na analizu naprežanja i deformacija razmatrane klase mehanizama i kod velikih kutova rotacije, što stvara pretpostavke za uporabu te metode na analizu utjecaja konstrukcijskih parametara i opterećenja rotacijskog podatljivog mehanizma.

Analizom metodom konačnih elemenata također je pokazano da kod simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama opterećenih momentom veličina parazitnog pomaka eksponencijalno raste s porastom kuta rotacije mehanizma, dok je faza parazitnog pomaka jednaka polovici vrijednosti tog kuta. Rotacijska krutost simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama vrlo blago eksponencijalno raste s porastom kuta rotacije (gotovo je konstantna). Kod rotacijskih podatljivih mehanizama rotacijska krutost ne poprima negativnu vrijednost, pa posljedično ne dolazi do nestabilnosti mehanizma. Ekvivalentna naprežanja linearno pak rastu s porastom kuta rotacije mehanizma.

Provedena je zatim temeljita analiza približnih analitičkih postupaka izračuna deformacija i naprežanja analiziranih mehanizama dostupnih u literaturi. Kako bi se utvrdile granice primjenjivosti pojedinih približnih metoda proračuna u ovisnosti o zahtijevanom stupnju točnosti, rezultati dobiveni tim metodama uspoređeni su s onima dobivenima metodom konačnih elemenata. Poseban naglasak stavljen je pritom na preciznost izračuna dvaju najvažnijih parametara kojima se predviđa ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama u radu: parazitnih pomaka i rotacijske krutosti, a analizirano je područje kutova rotacije od $0^\circ < \vartheta < 30^\circ$.

Normalizirana veličina parazitnog pomaka dobivena *Elastica* metodom izvrsno se poklapa s metodom konačnih elemenata za sve analizirane kutove rotacije mehanizma dok su odstupanja metode pseudo–krutog modela prema Peiu [Pei et al., 2009] neznatna. *Elastica* metodom se, kao što je više puta rečeno, rješava točna diferencijalna jednadžbe elastične linije, pa se očekivano primjenom te metode dobivaju najtočnije analitički dobivene normalizirane veličine parazitnih pomaka. Primjenom geometrijske metode prema Troegeru [Troeger, 1962] i kinematičkog modela prema Wuestu [Wuest, 1950] dobivaju se zanemariva odstupanja rezultata za kutove rotacije manje od 15° pa se primjena ovih računski jednostavnijih metoda može preporučiti kod manje zahtjevnih preliminarnih izračuna rotacijskih podatljivih mehanizama. Za kutove rotacije veće od 15° geometrijska metoda prema Tregeru daje točnije rezultate od kinematičkog modela. Uspoređeni su i rezultati metode pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom prema Howellu [Jensen, Howell, 2002], metode pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema Howellu [Jensen, Howell, 2002] te geometrijske metode zglobnog četverokuta s rezultatima dobivenim metodom konačnih elemenata. Utvrđeno je tako da niti jedna od tih metoda ne daje dovoljnu razinu točnosti izračuna veličine parazitnih pomaka. Očekivano, geometrijska metoda zglobnog četverokuta najviše odstupa jer se njome ne uzima u obzir savijanje grede i utjecaj aksijalnih sila. Treba još naglasiti da pretpostavku metode približne zakrivljenosti prema Wittricku [Wittrick, 1948] prema kojoj je veličina parazitnog pomaka za kutove manje od 20° zanemariva treba 'uzeti' s rezervom, jer se tom metodom dobivaju, u odnosu na numeričke rezultate, najveća odstupanja od svih analitičkih metoda (izuzev onih geometrijske metode zglobnog četverokuta) već za kutove rotacije mehanizma veće od 7° .

Kod rotacijskih mehanizama opterećenih momentom rotacijska krutost ima gotovo konstantnu karakteristiku u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma, odnosno rotacijska krutost se promjenom momenta značajnije ne mijenja. U cijelom području analiziranih kutova rotacije mehanizma ostvareno je izvrsno poklapanje rotacijske krutosti dobivene *Elastica* metodom s utjecajem antiklastičnog efekta s metodom konačnih elemenata. Odstupanja *Elastica* metode bez utjecaja antiklastičnog efekta rastu s porastom kuta rotacije mehanizma, pa pri kutu od $\vartheta = 30^\circ$ odstupanje od rezultata metode konačnih elemenata iznosi $\Delta K = 1,01\%$. Primjenom metode pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema Howellu [Jensen, Howell, 2002] za raspon kutova $10 < \vartheta < 23^\circ$ dobivaju se odstupanja rotacijske krutosti unutar 1%. Odstupanja rotacijske krutosti dobivena metodom približne zakrivljenosti prema Wittricku [Wittrick, 1948] od rezultata metodom konačnih elementa rastu eksponencijalno s porastom

kuta rotacije. Doista, iako je ovom metodom uzet u obzir utjecaj aksijalne sile na savijanje lisnate opruge, aproksimacijom izraza za elastičnu liniju zanemaruje se kvadrat male vrijednosti $(dy/dx)^2$ čime se čini značajna pogreška. Za kutove rotacije mehanizma $\vartheta \leq 15^\circ$ odstupanja te metode su tako unutar 1 %, ali pri kutu rotacije $\vartheta = 30^\circ$ odstupanje iznosi već $\Delta K = 5\%$. Metoda pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom prema Howellu [Jensen, Howell, 2002] ne omogućava dovoljnu razinu točnosti za izračun rotacijske krutosti.

Na temelju navedenoga zaključuje se da je *Elastica* metoda pogodna za precizne izračune parazitnih pomaka i rotacijske krutosti rotacijskih podatljivih mehanizama dok se od približnih analitičkih metoda pogodnom za izračun parazitnih pomaka pokazala metoda pseudo–krutog modela prema Peiu [Pei et al., 2009]. Za približne preliminarne proračune parazitnih pomaka preporučaju se geometrijska metoda prema Troegeru [Troeger, 1962] i kinematički model prema Wuestu [Wuest, 1950], a za izračun rotacijske krutosti metoda približne zakrivljenosti prema Wittricku [Wittrick, 1948].

Numerički model metodom konačnih elemenata razvijen u disertaciji pogodan je i računski ne prezahtjevan alat za predviđanje ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama. Stoga je analiza metodom konačnih elemenata proširena kako bi se provela analiza utjecaja konstrukcijskih parametara na ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama. Posebno su pritom analizirani sljedeći konstrukcijski čimbenici: promjena kuta među lisnatim oprugama, promjena točke presjecišta opruga te promjena početne zakrivljenost opruga, a sve kako bi se utvrdilo kako promjena konstrukcijske konfiguracije i opterećenja utječe na rotacijsku krutost, stabilnost i točnost mehanizma.

Promjenom kuta α lisnatih opruga prema vertikali utvrđeno je da normalizirana veličina parazitnog pomaka eksponencijalno raste s porastom kutova α i ϑ . S porastom kuta α raste i rotacijska krutost mehanizma, ali rast nije značajan. Porastom kuta α rastu naprezanja u uklještenjima lisnatih opruga dok promjena kuta α ne utječe na fazu parazitnog pomaka.

Pomicanjem točke presjecišta lisnatih opruga ustanovljeno je da se tim konstrukcijskim parametrom značajno utječe na rotacijsku krutost, parazitne pomake i naprezanja mehanizma. Pomicanjem točke presjecišta sa sredine aktivnih duljina lisnatih opruga prema uklještenjima, rotacijska krutost i naprezanja rastu. Parazitni se pomaci pak pritom smanjuju te pravilnim odabirom konstrukcijskog parametra λ ti pomaci postaju neznatni. Ako se u primjeni očekuju mali kutovi rotacije mehanizma, najpovoljniji položaj presjecišta, sa stajališta minimizacije parazitnih pomaka, je kada parametar λ iznosi $\lambda = 0,127$. Ako se očekuju veći kutovi rotacije

(oko 30°) preporučena vrijednost parametra λ raste i to tako da, redom, za kutove $\alpha = 15^\circ$, 30° , 45° vrijedi $\lambda = 0,175$; $0,133$ i $0,1305$. Smanjenje parazitnog pomaka promjenom konstrukcijskog parametra λ dobiva se, međutim, uz znatno (cca. 3 puta) povećanje rotacijske krutosti mehanizma te uz analogno povećanje ekvivalentnih naprezanja.

Analizom rotacijskog mehanizma s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću izveden je zaključak da s porastom zakrivljenosti lisnatih opruga rastu rotacijska krutost i ekvivalentna naprezanja. Promjenom početne zakrivljenosti lisnatih opruga neznatno se utječe na veličinu parazitnih pomaka, a ovisnost parazitnih pomaka o kutu rotacije mehanizama je gotovo linearna. U cijelom analiziranom području normalizirana veličina parazitnih pomaka veća je nego kod izvedbe podatljivog mehanizma s ravnim lisnatim oprugama, a odstupanja rastu sa smanjivanjem kuta rotacije mehanizma. Može se stoga zaključiti da mehanizmi s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću pokazuju veliku rotacijsku nepreciznost čak i pri malim kutovima rotacije mehanizma te se ne preporuča njihova uporaba.

Usporedbom simetrične monolitne izvedbe rotacijskih podatljivih mehanizama s izvedbom mehanizma iste geometrije kod kojeg su lisnate opruge mimosmjerne utvrđeno je da monolitni mehanizam ima gotovo četiri puta veću rotacijsku krutost ali i pet puta manje parazitne pomake. Naprezanja su pak tri puta veća uz vrlo mali utjecaj kuta α . Parazitni pomaci monolitnog rotacijskog podatljivog mehanizma mogu se značajno smanjiti tzv. leptirastom konfiguracijom mehanizma čija je proizvodnja tehnološki zahtjevnija i skupa. Tom su konfiguracijom dobiveni parazitni pomaci i 20 puta manji od onih konstrukcijske konfiguracije s mimosmjernim lisnatim oprugama uz 2 puta manja naprezanja u uklještenjima od onih koji se dobivaju kod konvencionalnih monolitnih mehanizama. Leptirasta je konfiguracija, dakle, posebno pogodna kada je potrebno minimizirati parazitne pomake uz zadržavanje mogućnosti velikih raspona rotacije mehanizama.

Numeričkom analizom ispitan je i utjecaj vertikalnih sila na rotacijsku krutost i stabilnost razmatranih mehanizama. Horizontalne sile nisu uzete u razmatranje jer se njihov utjecaj fizikalno superponira s momentom. Ustanovljeno je tako da djelovanje vertikalne sile značajno utječe na ponašanje analizirane klase mehanizama. Vlačna vertikalna sila smanjuje rotacijsku krutost i povećava parazitne pomake, a tlačna sila ima obrnuti utjecaj. Utvrđeno je i da djelovanje tlačne sile može uzrokovati da se najveće naprezanje više ne javlja u uklještenju. Ispitane su pritom konstrukcijske konfiguracije podatljivih mehanizama s kutovima $\alpha = 15^\circ$, 30° , 45° i presjecištem na sredini aktivnih duljina. Negativna rotacijska krutost dovodi do nestabilnosti mehanizma, a pokazalo se da promjena vertikalne sile

značajno utječe na rotacijsku krutost pa, posljedično, i na stabilnost mehanizma. Za sve analizirane vrijednosti kuta α pokazalo se da već mala vrijednost vlačne sile dovodi do nestabilnosti mehanizma, dok tlačne vertikalne sile mogu vrlo pozitivno utjecati na njegovu stabilnost. Smanjivanjem kuta α raste maksimalna tlačna sila koja dovodi do nestabilnosti.

Kako bi se utvrdilo optimalno konstrukcijsko rješenje koje omogućava minimizaciju parazitnih pomaka i varijabilnosti rotacijske krutosti u ovisnosti o kutu rotacije mehanizma, ispitan je utjecaj vertikalnih sila na rotacijski podatljivi mehanizam s vrijednostima konstrukcijskog parametara $\lambda \approx 0,13$ i $\lambda = 0,1$. Pokazalo se pritom da konstrukcijska konfiguracija s parametrom $\lambda \approx 0,13$ koja, pri $\alpha = 45^\circ$, jamči minimalne parazitne pomake, ima neznatnu varijaciju rotacijske krutosti u području vertikalnih sila različite orijentacije ako vrijedi $|V_{\text{vlak,tlak}} \cdot L^2 / (EI)| \leq 10$. Za vrijednost konstrukcijskog parametra $\lambda = 0,1$, kada na mehanizam djeluje vlačna vertikalna sila s bezdimenzijskom vrijednošću $V_{\text{vlak}} \cdot L^2 / (EI) \leq 30$ rotacijska krutost mehanizma ima vrlo malu varijabilnost, dok su parazitni pomaci još uvijek vrlo mali. Tada je mehanizam, dakle, stabilniji u širem rasponu sila nego mehanizam s oprugama koje se sijeku na sredini svojih duljina. Te stabilne konstrukcijske konfiguracije s neznatnim parazitnim pomacima i vrlo malom varijabilnošću rotacijske krutosti postižu se ipak po cijenu rasta rotacijske krutosti mehanizma, odnosno porasta momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ . Ipak, najveća ekvivalentna naprezanja su još uvijek, i za najveće razmatrane kutove rotacije mehanizama, znatno niža od granice tečenja usvojenog materijala lisnatih opruga.

Može se, stoga, na kraju zaključiti da optimalna konstrukcijska konfiguracija ovisi o konkretnoj primjeni. Optimum će se uvijek dobiti kao kompromis između rješenja koja dovode do poboljšanja nekih od karakteristika rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama uz istovremeno pogoršanje nekih drugih karakteristika. Monolitni mehanizam tako, primjerice, dovodi do smanjenja veličine parazitnih pomaka ali uz istovremeno povećanje rotacijske krutosti i naprezanja u oprugama što bi, pri većim kutovima rotacije mehanizma, moglo dovesti do ugrožavanja strukturne cjelovitosti mehanizma. Leptirasta konfiguracija dovodi do značajnog smanjenja parazitnih pomaka, uz nešto manje povećanje ekvivalentnih naprezanja, ali je njihova izrada tehnološki zahtjevnija i skupija. Konstrukcija s pomakom točke presjecišta lisnatih opruga na cca. 10–13 % njihove duljine može pak i pri većim kutovima rotacije mehanizma omogućiti neznatne parazitne pomake uz istovremenu minimizaciju varijabilnosti rotacijske krutosti uslijed djelovanja promjenjive vertikalne sile, osiguravanje stabilnosti mehanizma te zadržavanje naprezanja u oprugama na prihvatljivim razinama.

Takvo rješenje će, dakle, biti zadovoljavajuće u vrlo širokom rasponu potencijalnih primjena rotacijskih podatljivih mehanizama temeljenih na lisnatim oprugama.

Rezultati dobiveni u doktorskoj disertaciji omogućuju u svakom slučaju ne samo vrednovanje utjecaja konstrukcijskih parametara na ponašanje rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama, odnosno utjecaja tih parametara na rotacijsku krutost te preciznost i točnost mehanizama, nego i stvaraju preduvjete za razvoj nove klase rotacijskih podatljivih mehanizama ultravisokih preciznosti i točnosti s potencijalnim širokim poljem primjene u industrijskoj i konstrukcijskoj praksi.

10 Popis literature

- [1] Angeli, P., De Bona, F., Munteanu, M.Gh., *Micromeccanismi con molle a lamina: valutazione della rigidezza flessionale*, Proceedings of AIAS, 2006.
- [2] ANSYS 13.0 Mechanical APDL, Programski paket, Ansys Inc. 2014.
- [3] ANSYS 13.0 Mechanical APDL, Programski paket, Dokumentacija, Ansys Inc. 2014.
- [4] Ashwell, D. G., *The anticlastic curvature of rectangular beams and plates*, J. R. Aer. Soc., November 1950, 708-715.
- [5] Awtar, S., Slocum, A. H., *Constraint – Based Design of Paralel Kinematic XY Flexure Mechanisms*, Journal of Mechanical Design, 129(8), 2006, 816-830.
- [6] Awtar, S., Slocum, A. H., Sevincer, E., *Characteristic of Beam – Based Flexure Modules*, Journal of Mechanical Design, 129(6), 2006, 625-639.
- [7] Barten, H. J., *On the deflection of a cantilever beam*, Q. Appl. Math., 1945, II, 168-171, III, 275-276.
- [8] Bisshopp, K. E., Drucker, D. C., *Large deflection of simply supported beams*, Q. Appl. Math., III, 1945, 272-275.
- [9] Bitencourt, A. C. P., Goncalves Jr., L. A., Wagner, A., Lepikson, H. A., Weingaertner, W. L., *A novel mathematical model for flexure bearings applied in primary torque standard machine*, Proceedings of COBEM 2011, 2011.
- [10] Brnić, J., *Nauka o čvrstoći*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- [11] Brnić, J., *Elastomehanika i plastomehanika*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
- [12] Conway, H. D., *The large deflection of simply supported beams*, Phil. Mag., 38, 1947, 905-911.

- [13] Conway, H. D., *The nonlinear bending of thin circular rods*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 23 (78), 1956, 7-10.
- [14] De Bona, F., Zelenika, S., *A generalized elastica-type approach to the analysis of large displacements of spring-strips*, Proc. Instn. Mech. Engrs., 211(C), 1997, 509-517.
- [15] Erdman, A. G., Sandor, G. N., *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, Vol. 1, 3rd Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1997.
- [16] Euler, L., *De Curvis Elasticis, Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*, Lausanne & Geneva, 1744.
- [17] Fertis, D. G., *Nonlinear Structural Engineering*, Springer, Berlin-Heidelberg, D, 2006.
- [18] Frisch – Fay, R., *A new approach to the analysis of the deflection of thin cantilevers*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 28 (83), 1961, 87-90.
- [19] Frisch – Fay, R., *Flexible Bars*, Butterworths, Washington, D.C., USA, 1962.
- [20] Goncalves Jr., L. A., Bitencourt, A. C. P., Theska, R., Lepikson, H. A., *Characterization of the elasto – kinematic behavior of generalized cross – spring bearings*, Proceedings of 58th Ilmenau scientific colloquium, 2014.
- [21] Gospodnetic, D., *Deflection curve of simply supported beam*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 23 (78), 1956, 675-676.
- [22] Gradshteyn, I. S., Ryzhyk, I. M., *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, San Diego, CA, USA, 1980.
- [23] Haberland, R., *Flexure joint, particularly for connecting a gyroscope to its driving shaft*, United States Patent US4261211 A, 1981.
- [24] Haringx, A., *The cross-spring pivot as a constructional element*, Appl. Mech. Sci., A1, 1949, 313-332.
- [25] Harris, T. A., Kotzalas, M. N., *Rolling Bearing Analysis*, Wiley & Sons, NY, USA, 2006.
- [26] Hasselmeier, H., *Allgemeine Untersuchungen uber das Kreuzfedergelenk*, Jenaer Jahrbuch 1954, Jena, D., 279-304.
- [27] Heinen, S., Aymon, C., Bottinelli, S., *Articulated structures with flexible joints dedicated to high precision robotics*, International Advanced Robotic Programme, Moscow, 1999, 135-140.
- [28] Heinen, S., Bottinelli, S., Clavel, R., *Parallel spring stages with flexures of micrometric cross – section*, Proceedings of SPIE, Pittsburgh, USA, 1997, 13-17.

- [29] Henein, S., Kjelberg, I., Zelenika, S., *Flexible bearings for high-precision mechanisms in accelerator facilities*, Proc. 26th Adv. ICFA beam dynamics workshop on nanometer-size colliding beams, 2002, 103-110.
- [30] Henein, S., Spanoudakis, P., Droz, S., Myklebust, L. I., Onillon, E., *Flexure pivot for aerospace mechanisms*, Proc. 10th European Space Mechanisms and Tribology Symposium, ESA Publications Division, Noordwijk, NL, 2003.
- [31] Hildebrand, S., *Obliczanie i zachowanie się w pracy sprężyn krzyżowych*, Pomiary, 11, 1958, 501-508.
- [32] Hongzhe, Z., Shusheng, B., *Stiffness and stress characteristics of the generalized cross-spring pivot*, Mechanism and Machine Theory, 45, 2010, 378-391.
- [33] Hongzhe, Z., Shusheng, B., *Accuracy characteristics of the generalized cross-spring pivot*, Mechanism and Machine Theory, 45, 2010, 1434-1448.
- [34] Hongzhe, Z., Shusheng, B., Jingjun, Y., *Nonlinear deformation behavior of a beam – based flexural pivot with monolithic arrangement*, Precision Engineering, 35, 2011, 369-382.
- [35] Howell, L. L., *Compliant Mechanisms*, Wiley & Sons, NY, USA, 2001.
- [36] Howell, L. L., *Compliant Mechanisms*, 21st Century Kinematics, Chapter 7, ed. McCarthy, J. M., The 2012 NSF Workshop, Springer-Verlag, London, UK, 2013.
- [37] Howell, L. L., Magleby, S. P., Olsen, B. M., *Handbook of Compliant Mechanisms*, Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2013.
- [38] Howells, M. R., Duarte, R., McGill, R., *Properties of the cartwheel type flexural hinge*, 1996.
- [39] Hymans, F., *Flat springs with large deflections*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 13 (68), 1946, A-223-A-230.
- [40] Jensen, B. D., Howell L. L., *The modeling of cross-axis flexural pivots*, Mechanism and Machine Theory, 37, 2002, 461-476.
- [41] Jones, R. V., *Parallel and rectilinear spring movements*, Journal of Scientific Instruments, 28, 1951, 38-41.
- [42] Jones, R. V., *An optical slit mechanism*, Journal of Scientific Instruments, 29, 1952, 345-350.
- [43] Jones, R. V., *Angle – spring hinges*, Journal of Scientific Instruments, 32, 1955, 336-338.
- [44] Jones, R. V., Young, I.R., *Some parasitic deflections in parallel spring movements*, Journal of Scientific Instruments, 33, 1956, 11-15.

- [45] Jones, R. V., *A large optical slit mechanism employing spring movements*, Journal of Scientific Instruments, 33, 1956, 169-173.
- [46] Jones, R. V., *The velocity of light in a transverse magnetic field*, Proceedings of the Royal Society, 260, 1961, 47-60.
- [47] Jones, R. V., *Anti – distortion mountings for instruments and apparatus*, Journal of Scientific Instruments, 38, 1961, 408-409.
- [48] Jones, R. V., *Some uses of elasticity in instrument design*, Journal of Scientific Instruments, 39, 1962, 193-203.
- [49] LaRoux, K. G., *An overview of old and new techniques to make microgears*, Micromanufacturing 5, 2012.
- [50] Madenci, E., Guven, I., *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS*, Springer, Boston, USA, 2006.
- [51] *MATLAB R2010a, Ver. 7.11, The Language of Technical Computing*, Programski paket, The MathWorks, 2010.
- [52] *MATLAB, The Language of Technical Computing – Getting started with MATLAB, Ver. 7*, Dokumentacija, The MathWorks, 2010.
- [53] *MATLAB, The Language of Technical Computing – Programming, Ver. 7*, Dokumentacija, The MathWorks, 2010.
- [54] *MATLAB, The Language of Technical Computing – Creating Graphical User Interfaces, Ver. 7*, Dokumentacija, The MathWorks, 2010.
- [55] *MATLAB, The Language of Technical Computing – Using MATLAB Graphics, Ver. 7*, Dokumentacija, The MathWorks, 2010.
- [56] Mattiason, K., *Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 16, 1981, 145-153.
- [57] Mitchell, T. P., *The nonlinear bending of thin rods*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 26 (81), 1959, 40-43.
- [58] National Physical Laboratory, *Notes on Applied Science No. 15*, London, H.M. Stationary Office, 1956.
- [59] Nakasone, N., Stolarski, T. A., Yoshimoto, S., *Engineering analysis with ANSYS Software*, Elsevier Butterworth – Heinemann, Linacre House, Jordan Hill, Oxford, UK, 2006.
- [60] Navee, S., Elling, R. E., *Equilibrium configurations of cantilever beams subjected to inclined and loads*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 59, 1992, 572-579.

- [61] Nickols, L. W., Wunsch, H. L., *Design characteristic of cross-spring pivots*, Engineering, October 1951, 473-476.
- [62] Pavlović, N. D., Pavlović, T. D., *Gipki mehanizmi*, Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu, Srbija, 2013.
- [63] Pei, X., Yu, J., Zong, G., Bi, S., Su, H., *The modeling of cartwheel flexural hinges*, Mechanism and Machine Theory, 44, 2009, 1900-1909.
- [64] Pei, X., Yu, J., Zong, G., Bi, S., *An effective pseudo-rigid-body method for beam based compliant mechanisms*, Prec. Eng., 34, 2010, 634-639.
- [65] Pei, X., Yu, J., *ADLIF: A new large-displacement beam-based flexure joint*, Mech. Sci., 2, 2011, 183-168.
- [66] Plainevaux, J. E., *Guidage par suspension sur lames elastiques*, Nuovo Cimento, X, 1953, 1451-1460.
- [67] Reimer, O., *An overview over the state of the art in micro manufacturing processes*, Proc. 8th EUSPEN Int. Conf., 2007.
- [68] Saile, V., Wallrabe, U., Tabata, O., *LIGA and its Applications*, Advanced Micro and Nanosystems, 7, Wiley-VCH, Berlin, D, 2009.
- [69] Scott, E. J., Carver, D. R., *On the nonlinear differential equation for beam deflection*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 22 (77), 1955, 245-248.
- [70] Seames, A. E., Conway, H. D., *A numerical procedure for calculating the large deflection of straight and curved beams*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 24 (79), 1957, 289-294
- [71] Siddall, G. J., *The Design and Performance of Flexure Pivots for Instruments*, M. Sc. Thesis, University of Aberdeen, Aberdeen, UK, 1970.
- [72] Smith, S. T., *Flexures: Elements of Elastic Mechanisms*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, NL, 2000.
- [73] Smith, S. T., Chetwynd, D. G., *Foundations of Ultraprecision Mechanism Design*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, NL, 1992.
- [74] Teo, T. J., Chen, I-M., Yang, G., Lin, W., *A generic approximation model for analyzing large nonlinear deflection of beam-based flexure joints*, Prec. Eng., 34, 2010, 607-618.
- [75] Teo, T. J., Lum, G. Z., Yang, G. L., Yeo, S. H., Sitti, M., *Geometrical-based approach for flexure mechanism design*, Proc. 13th EUSPEN Int. Conf., 1, 2013, 184-187.
- [76] Timoshenko, S. T., *Strength of Materials*, Part I, D. Van Nostrand Company, New York, NY, USA, 1948.

- [77] Timoshenko, S. T., *Strength of Materials*, Part II, D. Van Nostrand Company, New York, NY, USA, 1948.
- [78] Timoshenko, S. T., *History of Strength of Materials*, McGraw – Hill, New York, NY, USA, 1953.
- [79] Timoshenko, S. T., Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd edition, McGraw – Hill, New York, NY, USA, 1961.
- [80] Troeger, H., *Considerations in the application of flexural pivots*, Automatic Control 17, 1962, 41-46.
- [81] Van Wijngaarden, A., *Large distortions of circular rings and straight rods – parts I and II*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. (Proc. R. Acad.), 49, 1949, 648-664.
- [82] Venanzi, S., Giesen P., Parenti-Castelli V., *A novel technique for position analysis of planar compliant mechanisms*, Mechanism and Machine Theory, 40, 2005, 1224-1239.
- [83] Weinstein, W. D., *Flexure–pivot bearings 1*, Machine Design, June 1965, 150-157
- [84] Weinstein, W. D., *Flexure–pivot bearings 2*, Machine Design, July 1965, 136-145
- [85] Wittrick, W. H., *The theory of symmetrical crossed flexure pivots*, CSIRO Australia, 1, 1948, 121-134.
- [86] Wittrick, W. H., *The properties of crossed flexure pivots, and the influence of the point at which the strips cross*, The Aeronautical Quarterly, 2, 1951, 272-292.
- [87] Wuest, W., *Blattfedergelenke für Meßgeräte*, Feinwerktechnik, 54, 1950, 167-170.
- [88] Yau, J. D., *Closed-Form Solutions of Large Deflection for a Guyed Cantilever Column Pulled by an Inclination Cable*, Journal of Marine Science and Technology, 18 (1), 2010, 130-136.
- [89] Young, W. E., *An Investigation of the Cross – Spring Pivot*, Journal of Applied Mechanics, 1944, A113-A120.
- [90] Zelenika, S., De Bona, F., *Analytical and experimental characterisation of high-precision flexural pivots subjected to lateral loads*, Prec. Eng., 26, 2002, 381-388.
- [91] Zelenika, S., Munteanu, M. Gh., De Bona, F., *Optimized flexural hinge shapes for microsystems and high-precision applications*, Mechanism and Machine Theory, 44, 2009, 1826-1839.
- [92] Ziekiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw – Hill, UK, 1977.

11 Popis oznaka i indeksa

OZNAKE

- A - kruto tijelo, rubna točka lisnate opruge / konzolne grede,
 A, B, C - koeficijenti kvadratnog polinoma
 a, b, c - koeficijenti kvadratnog polinoma
 a - os ordinate pravokutnog koordinatnog sustava
 a - uzdužni pomak, mm
B - kruto tijelo, rubna točka lisnate opruge / konzolne grede
 B_1, B_2 - pomoćni koeficijenti (antiklastični efekt)
 B_3 - središnja točka na krutom tijelu B
 b - širina lisnate opruge / konzolne grede, mm
C - bezdimenzijska značajka (*Elastica*)
 C_1 - konstanta integracije
D - točka na elastičnoj liniji (*Elastica*)
 d - veličina parazitnog pomaka, mm
E - Youngov modul elastičnosti, N/mm²
 E' - korigirani Youngov modul elastičnosti, N/mm²
 $E(k, \varphi)$ - nepotpuni eliptični integral druge vrste
 $E(k)$ - potpuni eliptični integral druge vrste
 e - uzdužno produljenje / skraćenje lisnate opruge / konzolne grede, mm
F - sila, N
 $F(ab)$ - pomoćna vrijednost (antiklastični efekt)
 $F(k, \varphi)$ - nepotpuni eliptični integral prve vrste

$F(k)$	- potpuni eliptični integral prve vrste
f	- os apscise pravokutnog koordinatnog sustava
f	- poprečni pomak, mm
$f(ab)$	- pomoćna vrijednost (antiklastični efekt)
H	- horizontalna sila, N
H	- pomoćna duljina (Pei), mm
H_f	- pomoćna duljina (Pei), mm
h	- ordinata slobodnog kraja konzole (Frisch – Fei)
I	- moment inercije, mm ⁴
K	- rotacijska krutost, Nm/rad
K_i	- rotacijska krutost (Young), Nm/rad
K_{Θ}	- koeficijent krutosti kod pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom
$K_{\Theta,4}$	- koeficijent krutosti kod pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma
k	- modul za izračunavanje eliptičnih integrala
L	- duljina lisnate opruge / konzolne grede, mm
L'	- relevantna duljina lisnate opruge / konzolne grede pri izračunu izvijanja, mm
l	- duljina kratke lisnate opruge / konzolne grede, mm
M	- moment, Nm
N	- pomoćni koeficijent (Pei)
n	- bezdimenzijska značajka koja opisuje relativnu geometriju zgloba (Howell), broj lisnatih opruga (Young), broj lisnatih opruga (Nickols i Wunsch)
O	- geometrijsko središte podatljivog zgloba, presjecište lisnatih opruga
P	- sila (<i>Elastica</i>), poprečna sila, N
R	- efektivna duljina podatljivog zgloba (Howell), mm
r	- koeficijent korelacije
r	- polumjer zakrivljenosti, duljina štapa mehanizma (Howell), mm
S_1, S_2	- pomoćni koeficijenti (Howell)
s	- duljina kružnog luka, mm
T	- pomoćni moment, (Howell), Nm
t	- debljina lisnate opruge / konzolne grede, mm
U	- uzdužna sila, N
V	- vertikalna sila, N
Z	- pomoćna varijabla dobivena eksperimentom (Nickols i Wunsch)
z	- os z u pravokutnom koordinatnom sustavu

W	- efektivna širina podatljivog zgloba (Howell), mm
X	- apscisa rubne točke krutog tijela (Howell), mm
x	- os apscise u pravokutnom koordinatnom sustavu
Y	- ordinata rubne točke krutog tijela (Howell), mm
y	- os ordinate u pravokutnom koordinatnom sustavu
α	- kut lisnatih opruga prema vertikalnoj osi, °
ab	- pomoćni koeficijent (antiklastični efekt)
β	- nagib elastične linije prema vertikali u rubnoj točki vitkog štapa (Timoshenko), °
β	- kut rotacije (geometrijska), °
β	- pomoćni faktor (Wittrick)
γ	- karakteristični koeficijent zakrivljenosti (Howell)
γ	- nagib elastične linije lisnate opruge s početnom zakrivljenošću prema vertikali, °
Δ	- kontrolna vrijednost (<i>Elastica</i>)
Δ	- razlika, mm
Δx	- pomak u smjeru osi x , mm
Δy	- pomak u smjeru osi y , mm
Δz	- pomak u smjeru osi z , mm
δ	- progib slobodnog kraja lisnate opruge / konzolne grede, pomak slobodnog kraja kratkog podatljivog zgloba (Howell) mm
ε	- odstupanje (Howell), mm
ε	- pomoćna varijabla (<i>Elastica</i>)
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	- pomoćni kutovi (Howell), °
Θ	- kut rotacije pseudo-krutog modela tijela (Howell), °
θ	- nagib elastične linije lisnate opruge, °
λ	- parametar koji određuje položaj presjecišta lisnatih opruga
ϑ	- kut rotacije mehanizma, °
ν	- Poissonov koeficijent
ν	- apscisa slobodnog kraja konzole (Frisch – Fay), mm
ζ	- pomoćni faktor (Wittrick)
σ	- naprezanje, N/mm ²
Φ	- pomoćni faktor (antiklastični efekt)
φ	- faza parazitnog pomaka, °
φ	- amplituda za izračunavanje eliptičnih integrala
ϕ	- kut između apscise x i apscise f pravokutnih koordinatnih sustava (<i>Elastica</i>), °

ψ - pomoćni faktor (Wittrick)

INDEKSI

0 - rubna točka lisnate opruge u kojoj je $s = 0$, početni položaj (Howell)

1 - lisnata opruga broj 1

2 - lisnata opruga broj 2

1, 2, 3, 4 - broj štapa (Howell), mm

A - rubna točka lisnate opruge / konzolne grede

a - u smjeru osi a pravokutnog koordinatnog sustava

AE - antiklastični efekt

B - rubna točka lisnate opruge / konzolne grede

D - točka D na elastičnoj liniji

e - ekvivalentno

MKE - vrijednost dobivena metodom konačnih elemenata

H - u horizontalnom smjeru

L - rubna točka lisnate opruge u kojoj je $s = L$

L - duga lisnata opruga

l - kratka lisnata opruga

K - kratki

Kor - korigirano

krit - kritično

max - maksimalno

O - sjecište lisnatih opruga

P - podatljivi

T - tlak

Usporedba - vrijednost koja se uspoređuje s rezultatima MKE

V - u vertikalnom smjeru

x - u smjeru osi apseise pravokutnog koordinatnog sustava

y - u smjeru osi ordinate pravokutnog koordinatnog sustava

EKSPONENTI

' - zakrenuti/pomaknuti položaj

" - projekcija točke

* - kada je $|k| \geq 1$ (Elastica)

12 Popis slika i tablica

SLIKE

Slika 2.1	Tradicionalni (a) i podatljivi (b) mehanizam	5
Slika 2.2	Lisnata opruga sa slobodnim krajem (a), lisnata opruga s krutim tijelom pričvršćenim na slobodnom kraju (b)	7
Slika 2.3	Kratki podatljivi zglob	8
Slika 2.4	Prikaz izvedbi podatljivog dijela zgloba u obliku kružnice (a), elipse (b) i prizme (c)	8
Slika 2.5	Primjer uporabe podatljivog elementa (obojan crvenom bojom) izrazito male duljine i debljine (engl. <i>living hinges</i>)	9
Slika 2.6	Pomak mehanizma ostvaren koncentriranom (a) i distribuiranom podatljivošću (b)	9
Slika 2.7	Podatljivi mehanizam koji vrši translacijsko (a), rotacijsko (b) i kombinirano (c) gibanje	10
Slika 2.8	Zglobovi s mimosmjernim lisnatim oprugama (a) i (c), te zglobovi kod kojih se lisnate opruge sijeku uzduž geometrijske osi mehanizma (b)	11
Slika 2.9	Glavna os deformacije kod rotacijskog podatljivog zgloba (a) i translacijskog podatljivog mehanizma (b)	11
Slika 2.10	Podatljivi mehanizmi u svakodnevnoj primjeni	12

Slika 2.11	Monolitna izvedba mehanizama koji ostvaruje translacijsko gibanje raspona 0,5 mm (a) [Henein et al., 1999] i leptirastog mehanizma s lisnatim oprugama (b) [Henein et al., 2003]	13
Slika 2.12	Sustav za usmjeravanje laserskih zraka u satelitima razvijen u grupaciji TNO u Nizozemskoj (a) i grupacijama RUAG i CSEM u Švicarskoj (b)	13
Slika 2.13	Struktura izrađena dubokom litografijom X-zrakama, najmanja širina iznosi 6 μm , visina je 120 μm	14
Slika 2.14	Izradak proizveden u 'mikrotvornici' [LeRoux, 2012]	15
Slika 2.15	Konzolna greda opterećena na slobodnom kraju poprečnom silom P koja uzrokuje progib δ slobodnog kraja	17
Slika 2.16	Princip elastične sličnosti (prema [Frisch – Fay, 1961])	18
Slika 2.17	Jednostavni translator s paralelnim oprugama (a), kompenzirani translator (b), kompaktni kompenzirani translator (c), kompenzirani translator s izbjegavanjem utjecaja težine blokova na glavni stupanj slobode gibanja (d) (prema [Jones, 1951])	21
Slika 2.18	Izvedbe oslonaca postolja preciznih instrumenata (prema [Jones, 1961. II])	22
Slika 2.19	Model kratkog zgloba (a) i model rotacijskog podatljivog mehanizma (b) modeliran metodom pseudo–krutog modela tijela (prema [Jensen, Howell, 2002])	25
Slika 2.20	Monolitni rotacijski podatljivi mehanizam (a), štapni model (b), model zgloba sa svornjakom (c) (prema [Pei, Yu, 2009])	26
Slika 2.21	Rotacijski podatljivi mehanizam (a), štapni model (b), model zgloba sa svornjakom (c) (prema [Pei et al., 2010])	26
Slika 2.22	Nesimetrični dvostruki jednakokračni trapezni zglob s lisnatim oprugama (a), štapni model (b), model zgloba sa svornjakom (c) (prema [Pei, Yu, 2011])	27
Slika 3.1	Vitka konzolna greda opterećena poprečnom silom	32
Slika 3.2	Prikaz pojave antiklastičnog efekta kod grednog elementa	34
Slika 3.3	Horizontalna greda uklještena na oba kraja opterećena poprečnom silom na sredini	35

Slika 3.4	Vitki štap opterećen poprečnom silom (a), opterećen poprečnom i uzdužnom vlačnom silom (b), te opterećen poprečnom i uzdužnom tlačnom silom (c).....	35
Slika 3.5	Geometrijske karakteristike rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama.....	36
Slika 3.6	Pomak krutog tijela A u položaj A'.....	37
Slika 3.7	Vitki ukliješteni štap opterećen aksijalnom silom F čija je vrijednost malo veća od kritične vrijednosti koja dovodi do izvijanja (prema [Timoshenko, Gere 1961]).....	38
Slika 3.8	Karakteristični parametri rotacijskog podatljivog mehanizma.....	42
Slika 3.9	Lisnata opruga $\overline{A_1B_1}$ u deformiranom položaju.....	43
Slika 3.10	Parazitni pomak rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama.....	55
Slika 3.11	Dijagram toka programskog rješenja ' <i>Elastica</i> '.....	58
Slika 3.12	Grafičko korisničko sučelje programskog rješenja ' <i>Elastica</i> '.....	60
Slika 3.13	Dijagram ovisnosti rotacijske krutosti (a), normalizirane veličine parazitnog pomaka (b), faze parazitnog pomaka (c), i najvećeg naprezanja (d) o kutu rotacije mehanizma.....	61
Slika 4.1	Rotacijski mehanizam zakrenut za mali kut rotacije ϑ (prema [Wittrick, 1948]).....	64
Slika 4.2	Lisnata opruga na slobodnom kraju opterećena poprečnom te aksijalnom vlačnom silom i momentom (prema [Wittrick, 1948]).....	65
Slika 4.3	Lisnata opruga na slobodnom kraju opterećena poprečnom te aksijalnom tlačnom silom i momentom (prema [Wittrick, 1948]).....	67
Slika 4.4	Ovisnost pomoćnih koeficijenata ζ i ψ o promjeni koeficijenata β_T i β_V (prema [Wittrick, 1948]).....	69
Slika 4.5	Opterećenje rotacijskog podatljivog mehanizma (prema [Wittrick, 1948]).....	69
Slika 4.6	Dijagram rotacijske krutosti, odnosno stabilnosti rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama (prema [Wittrick, 1948]).....	72
Slika 4.7	Stabilno područje rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama (prema [Wittrick, 1948]).....	72

Slika 4.8	Dijagram toka programskog rješenja metodom približne zakrivljenosti (prema [Wittrick, 1948]).....	73
Slika 4.9	Grafičko korisničko sučelje programskog rješenja dobivenog primjenom metode približne zakrivljenosti (a) i dijagram ovisnosti rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma ϑ (b)	74
Slika 4.10	Pseudo–kruti model zgloba sa svornjakom (prema [Howell, 2001]).....	76
Slika 4.11	Modeliranje rotacijskog podatljivog zgloba s lisnatim oprugama kao pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom (prema [Jensen, Howell, 2002])	78
Slika 4.12	Promjena geometrije rotacijskog podatljivog mehanizma ovisna o promjeni bezdimenzijske značajke n (prema [Jensen, Howell, 2002])	79
Slika 4.13	Dijagram toka programskog rješenja pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom.....	81
Slika 4.14	Grafičko korisničko sučelje programskog rješenja pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom (a) i dijagram ovisnosti rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma ϑ (b).....	82
Slika 4.15	Pseudo–kruti model lisnate opruge opterećene na slobodnom kraju momentom (prema [Howell, 2001])	83
Slika 4.16	Modeliranje podatljivog zgloba s lisnatim oprugama kaopseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma (prema [Jensen, Howell, 2002])	84
Slika 4.17	Kutovi štapova pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma prema osi x u deformiranom položaju.....	86
Slika 4.18	Prikaz parazitnog pomaka podatljivog zgloba primjenom pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma	88
Slika 4.19	Dijagram toka programskog rješenja pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma	90
Slika 4.20	Grafičko korisničko sučelje programskog rješenja pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma	91
Slika 4.21	Dijagram ovisnosti rotacijske krutosti (a), normalizirane veličine parazitnog pomaka (b), faze parazitnog pomaka (c) te najvećeg naprezanja (d) o kutu rotacije mehanizma	92

Slika 4.22	Zglobni četverokut (a) i aproksimacija rotacijskog podatljivog mehanizma zglobnim četverokutom (b)	93
Slika 5.1	Ravni stezač (a) i stezač u obliku slova U (b).....	100
Slika 5.2	Ovisnost rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma	101
Slika 5.3	Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka mehanizma o kutu rotacije mehanizma	102
Slika 5.4	Ovisnost momenta o kutu rotacije mehanizma	104
Slika 5.5	Ovisnost rotacijske krutosti o debljini lisnate opruge.....	105
Slika 5.6	Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije.....	106
Slika 5.7	Ekperimentalni postav [Zelenika, De Bona, 2002]	107
Slika 5.8	Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma	108
Slika 5.9	Prikaz mjerenih parazitnih pomaka d_x i d_y i faze parazitnog pomaka φ	109
Slika 5.10	Ovisnost faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma.....	109
Slika 6.1	Model rotacijskog podatljivog zgloba koji će se modelirati grednim elementima.....	112
Slika 6.2	Pravokutni poprečni presjek definiran s četiri ćelije u ravnini $y'z'$	113
Slika 6.3	Gredni element BEAM189	114
Slika 6.4	Umreženi model rotacijskog podatljivog mehanizma	114
Slika 6.5	Primjer ovisnosti faktora Φ o promjeni vrijednosti t/r i b/t za $\nu = 0,33$ (prema [Angeli et al., 2006]).....	117
Slika 6.6	Rubni uvjeti korištenog modela metode konačnih elemenata	118
Slika 6.7	Prikaz rotacijskog mehanizma u deformiranom položaju s naznačenim parazitnim pomakom.....	119
Slika 6.8	Promjena faktora Φ u ovisnosti o omjeru t/r za $b/t = 30$	120
Slika 6.9	Promjena momenta s utjecajem i bez utjecaja antiklastičnog efekta a) u ovisnosti o kutu rotacije podatljivog mehanizma i b) odstupanje dobivenih vrijednosti.....	121

Slika 6.10	Promjena rotacijske krutosti s utjecajem i bez utjecaja antiklastičnog efekta a) u ovisnosti o kutu rotacije podatljivog mehanizma i b) odstupanje dobivenih vrijednosti rotacijske krutosti	122
Slika 6.11	Prikaz ukupnih pomaka čvorova mreže	123
Slika 6.12	Normalizirana veličina te faza parazitnog pomaka u ovisnosti o kutu rotacije podatljivog mehanizma	123
Slika 6.13	Prikaz dobivenih ekvivalentnih naprezanja σ_e prema Von Misesu u čvorovima rotacijskog podatljivog mehanizma	124
Slika 6.14	Promjena ekvivalentnog naprezanja s utjecajem i bez utjecaja antiklastičnog efekta a) u ovisnosti o kutu rotacije podatljivog mehanizma i b) odstupanje dobivenih vrijednosti	125
Slika 6.15	Ovisnost sile u uklještenju o kutu rotacije podatljivog mehanizma.....	126
Slika 6.16	Usporedba rezultata eksperimentalnih mjerenja dostupnih u literaturi i analize metodom konačnih elemenata za normaliziranu veličinu parazitnog pomaka	127
Slika 6.17	Usporedba rezultata interferometrijskih mjerenja i analize metodom konačnih elemenata za fazu parazitnog pomaka modela ZdB (Tablica 5.4).....	128
Slika 6.18	Usporedba rezultata eksperimentalnih mjerenja i analize metodom konačnih elemenata za moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma modela Y03 (Tablica 5.1).....	129
Slika 7.1	Moment potreban za dobivanje određenog kuta rotacije ϑ dobiven numeričkom analizom i odstupanja od te vrijednosti dobivena analitičkim metodama u ovisnost o kutu rotacije mehanizma za mehanizam s oznakom ZdB i karakteristikama iz Tablice 5.4	132
Slika 7.2	Normalizirana veličina parazitnog pomaka dobivena numeričkom analizom i odstupanja od te vrijednosti dobivena analitičkim metodama ovisna o kutu rotacije mehanizma za mehanizam s oznakom ZdB i karakteristikama iz Tablice 5.4	134

Slika 7.3	Faza parazitnog pomaka dobivena metodom konačnih elemenata i različitim analitičkim metodama ovisna o kutu rotacije podatljivog mehanizma za mehanizam s oznakom ZdB i karakteristikama iz Tablice 5.4	136
Slika 7.4	Najveće naprežanje dobiveno numeričkom analizom i odstupanja od te vrijednosti dobivena analitičkim metodama ovisna o kutu rotacije mehanizma za mehanizam s oznakom ZdB i karakteristikama iz Tablice 5.4.....	137
Slika 8.1	Normalizirana veličina parazitnog pomaka ovisna o kutu rotacije mehanizma za konstrukcijske konfiguracije Mod01, Mod02 i Mod03 iz Tablice 8.1.....	143
Slika 8.2	Normalizirana veličina parazitnog pomaka ovisna o kutu rotacije mehanizma ϑ i kutu α za konstrukcijske konfiguracije Mod01, Mod02 i Mod03	144
Slika 8.3	Vrijednosti d/L dobivene analizom metodom konačnih elemenata (crvena boja) i izračunatih primjenom izraza (8.2) (plavom bojom) u ovisnosti o kutovima ϑ i α	145
Slika 8.4	Rotacijska krutost mehanizma ovisna o kutu rotacije ϑ i kutu lisnatih opruga prema vertikali α	146
Slika 8.5	Najveće naprežanje ovisno o kutu rotacije ϑ mehanizma i kutu lisnatih opruga prema vertikali α	147
Slika 8.6	Rotacijski podatljivi mehanizam čije se lisnate opruge ne sijeku na sredini aktivnih duljina.....	148
Slika 8.7	Rotacijska krutost ovisna o kutu ϑ i parametru λ za $\alpha = 15^\circ$ i $\alpha = 45^\circ$	149
Slika 8.8	Promjena rotacijske krutosti rotacijskog mehanizma ovisna o kutu rotacije mehanizma ϑ i parametru λ za $\alpha = 45^\circ$	149
Slika 8.9	Ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ o tom kutu i parametru λ za kut $\alpha = 45^\circ$	150
Slika 8.10	Ovisnost najvećeg naprežanja o kutu rotacije mehanizma ϑ i parametru λ za kut $\alpha = 45^\circ$	151
Slika 8.11	Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutovima α i ϑ	152
Slika 8.12	Promjena faze parazitnog pomaka ovisna o kutovima α i ϑ	152
Slika 8.13	Parametar λ za minimalne vrijednosti veličine parazitnog pomaka ovisan o kutu rotacije mehanizma ϑ i kutu α	153

Slika 8.14	Rotacijski podatljivi mehanizam s lisnatim oprugama s početnom zakrivljenošću	154
Slika 8.15	Ovisnost rotacijske krutosti podatljivog mehanizma o kutu rotacije ϑ i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga	155
Slika 8.16	Ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ o tom kutu i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga	156
Slika 8.17	Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma ϑ i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga.....	157
Slika 8.18	Ovisnost faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma ϑ i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga.....	157
Slika 8.19	Ovisnost najvećeg naprezanja o kutu rotacije mehanizma ϑ i početnoj zakrivljenosti lisnatih opruga.....	158
Slika 8.20	Monolitni rotacijski podatljivi mehanizam.....	159
Slika 8.21	Ovisnost rotacijske krutosti monolitnog podatljivog mehanizma o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite α	160
Slika 8.22	Ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije mehanizma ϑ o tom kutu za različite kutove α	160
Slika 8.23	Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije ϑ za različite kutove α	161
Slika 8.24	Ovisnost najvećeg naprezanja o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite kutove α	162
Slika 8.25	Model leptirastog mehanizma.....	162
Slika 8.26	Model leptirastog mehanizma kojem su međublokovi zamijenjeni gredama...	163
Slika 8.27	Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije ϑ za leptirasti mehanizam.....	164
Slika 8.28	Ovisnost najvećeg naprezanja o kutu rotacije mehanizma ϑ za leptirasti podatljivi mehanizma.....	164
Slika 8.29	Rotacijski podatljivi mehanizam opterećen momentom i silama kroz geometrijsko središte.....	166

Slika 8.30	Opterećenje i rubni uvjeti modela rotacijskog podatljivog mehanizma opterećenog silom i momentom.....	167
Slika 8.31	Ovisnost rotacijske krutosti o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite vrijednosti vertikalne sile.....	168
Slika 8.32	Ovisnost momenta potrebnog za dobivanje određenog kuta rotacije ϑ o tom kutu za različite vrijednosti vertikalnih sila.....	169
Slika 8.33	Ovisnost normalizirane veličine parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite vrijednosti vertikalnih sila.....	169
Slika 8.34	Ovisnost faze parazitnog pomaka o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite vrijednosti vertikalne sile.....	170
Slika 8.35	Ovisnost najvećih naprezanja o kutu rotacije mehanizma ϑ za različite vrijednosti vertikalne sile.....	170
Slika 8.36	Rotacijska krutost rotacijskog podatljivog mehanizma s lisnatim oprugama u ovisnosti o vlačnoj sili koja djeluje na mehanizam.....	171
Slika 8.37	Rotacijska krutost u ovisnosti o vlačnoj sili koja djeluje na mehanizam za različite vrijednosti parametra λ	172
Slika 8.38	Rotacijska krutost u ovisnosti o vertikalnoj sili koja djeluje na mehanizam za vrijednosti geometrijskog parametra $\lambda = 0,1$ i $\lambda \approx 0,13$	173

TABLICE

Tablica 5.1	Geometrijske karakteristike modela korištenih u Youngovom eksperimentu..	101
Tablica 5.2	Geometrijske karakteristike modela korištenih u Nickolsovom i Wunschovom eksperimentu.....	103
Tablica 5.3	Ekperimentalne vrijednosti rotacijske krutosti mehanizma.....	104
Tablica 5.4	Geometrijske karakteristike modela korištenog u Zelenikinom i De Boninom eksperimentu.....	107
Tablica 5.5	Geometrijske karakteristike modela korištenih u Siddallovom, Hildebrandovom i Wuestovom eksperimentu.....	110
Tablica 8.1	Geometrijske karakteristike analiziranih konstrukcijskih konfiguracija.....	142
Tablica 8.2	Koeficijenti polinoma iz izraza (8.1) i koeficijenti korelacije.....	144

Tablica 8.3 Geometrijske karakteristike konstrukcijskih konfiguracija rotacijskih
podatljivih mehanizama s oprugama s početnom zakrivljenošću..... 155

13 Prilozi

MATLAB implementacija analitičkih metoda izračuna ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama

13.1 *Elastica* metoda

13.2 Metoda približne zakrivljenosti

13.3 Metoda pseudo–krutog modela zgloba sa svornjakom

13.4 Metoda pseudo–krutog modela četveroštapnog mehanizma

13.5 Geometrijska metoda zglobnog četverokuta

13.1 ELASTICA METODA

```

ThetaDegMax=30;
AlfaDeg=45;
AlfaRad=AlfaDeg*pi/180;
ThetaRadMax=ThetaDegMax*pi/180;
a=[]; b=[]; c=[]; d=[]; e=[]; f=[]; m=[]; n=[];
Duljina=115;
Sirina=30;
Debljina=0.5;
ModulElasticnosti=131000;
MomentInercije=(Sirina*Debljina^3)/12;
a=1:ThetaDegMax;
for i=1:length(a)
K= 0.9;
Delta=1;
ThetaDegMax=i;
ThetaRadMax=ThetaDegMax*pi/180;
while abs(Delta)>1.E-10,
if abs(K)<=1,
Psi0=1/4*(pi-2*AlfaRad-ThetaRadMax);
Psi1=1/4*(pi-2*AlfaRad+ThetaRadMax);
RightSide=(1-sin(AlfaRad)*cos(ThetaRadMax/2))/2;
end
if abs(K-0)<1.E-15,
F1=Psi1; F0=Psi0; E1=Psi1; E0=Psi0;
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if K==(sin(pi/2))^2,
F1=log(tan(pi/4+Psi1/2));
F0=log(tan(pi/4+Psi0/2));
E1=sin(Psi1);
E0=sin(Psi0);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==0 && Psi1==pi/2,
F0=0; E0=0;
[F1, E1] = CompleteElliptic1 (K);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==pi/2 && Psi1==0,
[F0, E0] = CompleteElliptic0 (K);
F1=0; E1=0;
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==pi/2 && Psi1==pi/2,

```

```

[F0, E0] = CompleteElliptic0 (K);
[F1, E1] = CompleteElliptic1 (K);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==0 && Psi1==0,
F1=0; F0=0; E1=0; E0=0;
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==0 && Psi1~=0 && Psi1~=pi/2,
F0=0; E0=0;
[F1, E1] = IncompleteElliptic1 (K, Psi1);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi1==0 && Psi0~=0 && Psi0~=pi/2,
F1=0; E1=0;
[F0, E0] = IncompleteElliptic0 (K, Psi0);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
[F0, E0] = IncompleteElliptic0 (K, Psi0);
[F1, E1] = IncompleteElliptic1 (K, Psi1);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultForK_Max (K, Psi0, Psi1, AlfaRad,
ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
else
K=1/K;
Psi0=asin(sin(1/4*(pi-2*AlfaRad-ThetaRadMax))/K);
Psi1=asin(sin(1/4*(pi-2*AlfaRad+ThetaRadMax))/K);
RightSide=(1+sin(AlfaRad)*cos(ThetaRadMax/2))/2;
if abs(K-0)<1.E-15,
F1=Psi1; F0=Psi0; E1=Psi1; E0=Psi0;
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if K==(sin(pi/2))^2,
F1=log(tan(pi/4+Psi1/2));
F0=log(tan(pi/4+Psi0/2));
E1=sin(Psi1); E0=sin(Psi0);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==0 && Psi1==pi/2,
F0=0; E0=0;
[F1, E1] = CompleteElliptic1 (K);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==pi/2 && Psi1==0,

```

```

[F0, E0] = CompleteElliptic0 (K);
F1=0; E1=0;
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==pi/2 && Psi1==pi/2,
[F0, E0] = CompleteElliptic0 (K);
[F1, E1] = CompleteElliptic1 (K);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==0 && Psi1==0,
F1=0; F0=0; E1=0; E0=0;
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi0==0 && Psi1~=0 && Psi1~=pi/2,
F0=0; E0=0;
[F1, E1] = IncompleteElliptic1 (K, Psi1);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
if Psi1==0 && Psi0~=0 && Psi0~=pi/2,
F1=0; E1=0;
[F0, E0] = IncompleteElliptic0 (K, Psi0);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
end
[F0, E0] = IncompleteElliptic0 (K, Psi0);
[F1, E1] = IncompleteElliptic1 (K, Psi1);
[LeftSide, Mo, M_o, M1, M_1, M, M_, D_1, P] = ResultFor1_K_Max (K, Psi0, Psi1,
AlfaRad, ThetaRadMax, F0, F1, E0, E1);
K=1/K;
end
Delta=RightSide-LeftSide
if ThetaDegMax<40,
DeltaK=Delta*50;
else
DeltaK=Delta*10;
end
if K>1 || K<1.E-4,
DeltaK=-DeltaK;
end
K=K+DeltaK;
end
b(i)=D_1;
c(i)=Mo*ModulElasticnosti*MomentInercije/Duljina;
d(i)=M1*ModulElasticnosti*MomentInercije/Duljina;
e(i)=M*ModulElasticnosti*MomentInercije/Duljina;
f(i)=M*ModulElasticnosti*MomentInercije/Duljina/ThetaRadMax;

```

```

h(i)=P*ModulElasticnosti*MomentInercije/Duljina^2;
m(i)=Mo*ModulElasticnosti*MomentInercije/Duljina*Debljina/2/MomentInercije;
n(i)=ThetaDegMax/2;
end
g=[];
g=[a; b; c; d; e; f; h; m; n]
xlswrite('ElastMod.xls', g);

```

13.2 METODA PRIBLIŽNE ZAKRIVLJENOSTI

```

ThetaDegMax=30;
AlfaDeg=45;
AlfaRad=AlfaDeg*pi/180;
ThetaRadMax=ThetaDegMax*pi/180;
a=[]; b=[]; c=[]; d=[];
Duljina=115;
Sirina=30;
Debljina=0.5;
ModulElasticnosti=131000;
MomentInercije=(Sirina*Debljina^3)/12;
a=1:ThetaDegMax;
for i=1:length(a)
K= 0.9;
Delta=1;
ThetaDegMax=i;
ThetaRadMax=ThetaDegMax*pi/180;
b(i)=2*ModulElasticnosti*MomentInercije*ThetaRadMax/Duljina;
c(i)=b(i)/ThetaRadMax;
d(i)=b(i)*Debljina/MomentInercije/4;
end
g=[];
g=[a; b; c; d]
xlswrite('CurvMod', g);

```

13.3 METODA PSEUDO–KRUTOG MODELA ZGLOBA SA SVORNJAKOM

```

ThetaDegMax=30;
AlfaDeg=45;
AlfaRad=AlfaDeg*pi/180;
ThetaRadMax=ThetaDegMax*pi/180;
a=[]; b=[]; c=[]; d=[];
Duljina=115;
Sirina=30;
Debljina=0.5;
ModulElasticnosti=131000;
MomentInercije=(Sirina*Debljina^3)/12;
n=cot(AlfaRad);
r=Duljina*cos(AlfaRad);

```

```

a=1:ThetaDegMax;
for i=1:length(a)
ThetaDegMax=i;
ThetaRadMax=ThetaDegMax*pi/180;
if n>=0.5 && n<4
Kpinjoint=5.300185-1.6866*n+0.88535*n^2-0.2094*n^3+0.018385*n^4
end
S1=0.189394+0.89984*n-0.4333*n^2+0.097866*n^3-0.00839*n^4;
S2=-0.09799+0.982995*n-0.96184*n^2+0.413319*n^3-0.08387*n^4+0.00653*n^5;
K=Kpinjoint*ModulElasticnosti*MomentInercije/(2*Duljina);
b(i)=ThetaRadMax*K/1000;
c(i)=K/1000;
d(i)=ModulElasticnosti*Debljina/(2*r)*(S1*ThetaRadMax+S2*ThetaRadMax^2);
end
g=[];
g=[a; b; c; d]
xlswrite('PinJointMod', g);

```

13.4 METODA PSEUDO–KRUTOG MODELA ČETVEROŠTAPNOG MEHANIZMA

```

ThetaDegMax=30;
AlfaDeg=45;
AlfaRad=AlfaDeg*pi/180;
ThetaRadMax=ThetaDegMax*pi/180;
a=[]; b=[]; c=[]; d=[]; f=[];
Duljina=115;
Sirina=30;
Debljina=0.5;
ModulElasticnosti=131000;
MomentInercije=(Sirina*Debljina^3)/12;
w=Duljina*sin(AlfaRad);
r=Duljina*cos(AlfaRad);
n=r/w;
a=1:ThetaDegMax;
for i=1:length(a)
ThetaDegMax=i;
ThetaRadMax=ThetaDegMax*pi/180;
if n>=0.5 && n<1
Gama=2.208105-10.0489*n+27.83212*n^2-37.7021*n^3+25.032*n^4-6.5358*n^5
Kfourbars=1.075835+6.818114*n-13.6023*n^2+11.52314*n^3-3.53289*n^4
end
if n>=1 && n<=4
Gama=0.811175-0.03329*n+0.008143*n^2-0.00075*n^3
Kfourbars=2.241032+0.047655*n-0.00491*n^2
end
r2=Gama*Duljina
r4=r2
r1=sqrt((Gama*w)^2+r^2*(1-Gama)^2)
r3=r1

```

```

BetaRad=pi/2-AlfaRad
EpsilonRad=acos((r3^2+(Duljina-r2)^2-w^2)/(2*r3*(Duljina-r2)))
ThetaRad30=BetaRad+EpsilonRad
ThetaRad10=pi-ThetaRad30
ThetaRad1=ThetaRad10
ThetaRad3=EpsilonRad+BetaRad-ThetaRadMax
ThetaRad20=BetaRad
ThetaRad40=pi-BetaRad
syms a2 a4
[a2, a4] = solve(r2*cos(a2)+r3*cos(ThetaRad3)-r1*cos(ThetaRad1)-
r4*cos(a4),r2*sin(a2)+r3*sin(ThetaRad3)-r1*sin(ThetaRad1)-r4*sin(a4))
a2 = double(a2)
a4 = double(a4)
a2=abs(a2)
a4=abs(a4)
A2=a2/(2*pi)-floor(a2/(2*pi))
A4=a4/(2*pi)-floor(a4/(2*pi))
A2=A2*2*pi
A4=A4*2*pi
if A2 <= pi,
ThetaRad2=A2
else
ThetaRad2=2*pi-A2
end
if ((A4>=0) && (A4<=pi)),
ThetaRad4=A4
else
ThetaRad4=2*pi-A4
end
A1=r2*cos(ThetaRad2)+r3*cos(ThetaRad3)
A2=r1*cos(ThetaRad1)+r4*cos(ThetaRad4)
B1=r2*sin(ThetaRad2)+r3*sin(ThetaRad3)
B2=r1*sin(ThetaRad1)+r4*sin(ThetaRad4)
S1=0.189394+0.89984*n-0.4333*n^2+0.097866*n^3-0.00839*n^4
S2=-0.09799+0.982995*n-0.96184*n^2+0.413319*n^3-0.08387*n^4+0.00653*n^5
K=Gama*Kfourbars*ModulElasticnosti*MomentInercije/Duljina
T1=K*(ThetaRad2-ThetaRad20)
T2=K*(ThetaRad2-ThetaRad20-ThetaRad3+ThetaRad30)
T3=K*(ThetaRad4-ThetaRad40-ThetaRad3+ThetaRad30)
T4=K*(ThetaRad4-ThetaRad40)
b(i)=(Gama*Duljina*(cos(ThetaRad4-pi/2+ThetaRadMax/2)-
cos(AlfaRad+ThetaRadMax/2))-Duljina*sin(AlfaRad)*sin(ThetaRadMax/2))/Duljina
c(i)=(T2+T3-(T1+T2)*r3*sin(ThetaRad3-ThetaRad4)/(r2*sin(ThetaRad4-ThetaRad2))-
(T3+T4)*r3*sin(ThetaRad3-ThetaRad2)/(r4*sin(ThetaRad4-ThetaRad2)))*1000
d(i)=c(i)/ThetaRadMax
f(i)=ModulElasticnosti*Debljina/(2*r)*(S1*ThetaRadMax+S2*ThetaRadMax^2)
end
g=[];
g=[a; b; c; d; f]
xlswrite('FourBarMod', g);

```


13.5 GEOMETRIJSKA METODA ZGLOBNOG ČETVEROKUTA

```

Duljina=115;
AlfaDeg=30;
ThetaDeg=10;
AlfaRad=AlfaDeg*pi/180;
ThetaRad=ThetaDeg*pi/180;
a=[];
b=[];
c=[];
a=1:ThetaDeg;
for i=1:length(a)
ThetaDeg=i;
ThetaRad=ThetaDeg*pi/180;
A=8*cos(ThetaRad/2)^2;
B=8*Duljina*sin(AlfaRad)*cos(ThetaRad)*cos(ThetaRad/2)^2;
C=2*Duljina^2*sin(AlfaRad)^2*cos(ThetaRad/2)^2-2*Duljina^2*sin(ThetaRad)^2;
Xa2=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A);
Ya2=sqrt(Duljina^2-(Duljina*sin(AlfaRad)/2-Xa2)^2);
Xa1=Xa2+Duljina*sin(AlfaRad)*cos(ThetaRad);
Ya1=Ya2-Duljina*sin(AlfaRad)*sin(ThetaRad);
Xo_ =Xa2+Duljina/2*sin(AlfaRad-ThetaRad);
Yo_ =Ya2-Duljina/2*cos(AlfaRad-ThetaRad);
Yo=Duljina/2*cos(AlfaRad);
Xo=0;
Dx=Xo_ -Xo;
Dy=Yo_ -Yo;
D=sqrt(Dx^2+Dy^2)/Duljina;
Fi=atan(Dx/Dy);
b(i)=D;
c(i)=Fi;
end
g=[];
g=[a; b; c]
xlswrite('GeomMod', g);

```

ŽIVOTOPIS

Kristina Marković rođena je 04. prosinca 1974. u Rijeci, gdje je 1993. godine završila Gimnaziju Andrije Mohorovičića. Iste godine upisuje sveučilišni studij strojarstva pri Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, a na četvrtoj godini studija odabire konstrukcijsko usmjerenje. Za vrijeme studija stipendista je Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske i dobitnica nagrade i priznanja Tehničkog fakulteta za zalaganje i postignuti uspjeh na završnoj godini studija. Diplomirala je u travnju 2001. godine te stekla zvanje diplomiranog inženjera strojarstva.

Od rujna 2001. godine radi na Tehničkom fakultetu kao znanstveni novak na Zavodu za konstruiranje u strojarstvu. Iste godine upisuje Poslijediplomski znanstveni studij za stjecanje akademskih zvanja u području Tehničkih znanosti, polje Strojlarstvo. U listopadu 2007. godine izabrana je u zvanje i na radno mjesto asistenta.

Sudjeluje u nastavi izvođenjem vježbi iz kolegija *Konstrukcijski elementi I*, *Konstrukcijski elementi II*, *Elementi strojeva I* i *Laboratorijske vježbe*. Voditeljica je Laboratorija za akustiku.

Kao suradnik bila je uključena u rad na znanstvenoistraživačkom projektu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa "Konstrukcija i optimizacija prijenosnika snage", br. 069-0692195-1793 te bilateralnom hrvatsko – slovenskom projektu "Automatizirani sustav za identifikaciju parametara tkiva". Trenutno sudjeluje na EU FP7 znanstvenom projektu "Goldfish", međunarodnom hrvatsko – njemačkom projektu "Karakterizacija i modeliranje ponašanja materijala za lake i inovativne konstrukcije" te u potpori Sveučilišta u Rijeci "Karakterizacija i modeliranje ponašanja materijala i konstrukcija za inovativne primjene".

Objavila je u suautorstvu devet znanstvenih radova u časopisima odnosno prezentiranih na znanstvenim skupovima, kao i dva stručna rada. Boravila je na znanstvenim usavršavanjima na Sveučilištu West Bohemia u Pilsenu, Češka 2004. godine i na Sveučilištu u Udinama, Italija 2012. godine.

Udana je i majka dvoje djece.

POPIS RADOVA

Znanstveni radovi:

1. Kamenar, Ervin; Gregov, Goran; Zelenika, Saša; Blažević, David; Marković, Kristina: *Miniaturized underwater hydro generator for powering wireless sensor network nodes*, Proceedings of the 24th International Congress "Energy and the Environment 2014", 2014, 171-181.
2. Zelenika, Saša; Marković, Kristina; Rubeša, Josipa: *Optimised kinematic mount configuration for high-precision applications*: Annals of DAAAM for 2012. & Proceedings of the 23rd International DAAAM Symposium, 2012, 319-322.
3. Zelenika, Saša; Marković, Kristina; Rubeša, Josipa: *Precision and stability analysis of Maxwell-type kinematic mounts*, Proceedings of the 7th International Conference of the Croatian Society of Mechanics (7ICCSM2012), 2012, 175-176.
4. Marković, Kristina; Franulović, Marina: *Contact stresses in gear teeth due to tip relief profile modification*, Engineering review: znanstveni časopis za nove tehnologije u strojarstvu, brodogradnji i elektrotehnici, 31(1), 2011 19-26.
5. Buljanović, Kristina; Obsieger, Boris: *Influence of Tip Relief Profile Modification of Spur Involute Gears on Stresses*, International Journal Advanced Engineering, 3(2), 2009, 149-158,
6. Buljanović, Kristina; Rubeša, Josipa: *The Influence of Method of Attaching the Gear to the Shaft on Tooth Root Stress*, CADAM, 2005, 172.
7. Rubeša, Josipa; Siminiati, Dubravka; Buljanović, Kristina: *Regulation Simulation of Closed Loop Hydraulic System*, CADAM Book of Abstracts, 2005, 7.
8. Buljanović, Kristina; Siminiati, Dubravka; Rubeša, Josipa: *Dynamic Analysis of Pressure Oscillation in Simple Cylinder Control System*, CADAM Book of Abstracts, 2005, 96.
9. Buljanović, Kristina; Rubeša, Josipa: *The influence of method of attaching the gear to the shaft on tooth root stress*, CADAM Book of abstracts, 2004, 5-6.

Stručni radovi (ekspertize):

1. Zelenika, Saša; Kamenar, Ervin; Maćešić, Senka; Blažević, David; Gregov, Goran; Marković, Kristina; Glažar, Vladimir: *Complete laboratory functionality of at least one variant of the energy harvester*, Deliverable 4.5. EU FP7 projekta GOLDFISH –

Detection of Watercourse Contamination in Developing countries using Sensor Networks – Enlarged, 2014, 67 stranica.

2. Zelenika, Saša; Kamenar, Ervin; Maćešić, Senka; Blažević, David; Gregov, Goran; Marković, Kristina: *Design and specification of the energy harvesters and underwater harvester anchorage*, Deliverable 4.4. EU FP7 projekta GOLDFISH – Detection of Watercourse Contamination in Developing countries using Sensor Networks – Enlarged, 2014, 64 stranice.

PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

1. AUTOR

Ime i prezime: Kristina Marković

Datum i mjesto rođenja: 4. prosinca 1974., Rijeka

Naziv fakulteta, studija i godina završetka diplomskog studija: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišni diplomski studij strojarstva, 2001.

Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Konstruiranje u strojarstvu, 2015.

Sadašnje zaposlenje: Asistentica

2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov: Analiza konstrukcijskih parametara rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama

Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka: 216, 127, 8, 9

Znanstveno polje i grana: Strojarstvo, Precizno strojarstvo
Voditelji rada: prof. dr. sc. Saša Zelenika

Fakultet na kojem je rad obranjen: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

3. OBRANA I OcjENA

Datum prijave teme: 26. rujna 2014.

Datum predaje rada: 19. prosinca 2014.

Datum prihvaćanja ocjene rada: 27. veljače 2015.

Sastav Povjerenstva za ocjenu: prof. dr. sc. Dubravka Siminiati
prof. dr. sc. Saša Zelenika
prof. dr. sc. Nenad D. Pavlović

Datum obrane: 20. ožujka 2015.

Sastav Povjerenstva za obranu: prof. dr. sc. Dubravka Siminiati
prof. dr. sc. Saša Zelenika
prof. dr. sc. Nenad D. Pavlović

Datum promocije:

ANALIZA KONSTRUKCIJSKIH PARAMETARA ROTACIJSKIH PODATLJIVIH
MEHANIZAMA S LISNATIM OPRUGAMA

Kristina Marković

Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

Ključne riječi: Podatljivi mehanizam
Lisnata opruga
Nelinearni model
Preciznost i točnost
Parazitni pomaci
Rotacijska krutost
Optimizacija konstrukcijske konfiguracije

Sažetak:

U doktorskoj disertaciji analiziraju se konstrukcijski parametri različitih konfiguracija rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama. Osnovni ciljevi koji se postavljaju pri konstruiranju takvih mehanizama su: što veća rotacijska preciznost i točnost, što manja varijabilnost rotacijske krutosti, stabilnost, jednostavnost konstrukcije i pouzdanost. Budući da se razmatrani mehanizmi temelje na lisnatim oprugama, osnova predviđanja njihovog ponašanja upravo je analiza karakterističnih parametara lisnatih opruga. Kako bi se provela analiza konstrukcijskih parametara simetričnih rotacijskih podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama opterećenih momentom, u okviru doktorske disertacije razvijen je analitički model lisnatih opruga na polju velikih (geometrijski nelinearnih) deformacija primjenom tzv. Elastica metode kao i numerički model metodom konačnih elemenata. S ciljem utvrđivanja točnosti numeričkog modela pri analizi ponašanja rotacijskih podatljivih mehanizama, rezultati dobiveni tim modelom uspoređeni su s eksperimentalnim mjerenjima dostupnima u literaturi. Da bi se pak odredile granice primjenjivosti analitičkih metoda proračuna u ovisnosti o zahtijevanom stupnju točnosti, rezultati analitičke simulacije naprezanja i deformacija razmatranih mehanizama uspoređeni su zatim s rezultatima dobivenim metodom konačnih elemenata. Kako bi se potom optimizirala konstrukcijska konfiguracija, odnosno identificiralo konstrukcijsko rješenje koje omogućuje minimizaciju parazitnih pomaka i varijabilnosti rotacijske krutosti mehanizma i pri većim kutovima rotacije, metodom konačnih elemenata analizirani su utjecaj kuta među lisnatim oprugama, točke presjecišta opruga te početne zakrivljenosti opruga. Na kraju disertacije provedena je i analiza utjecaja vanjskih opterećenja na varijabilnost rotacijske krutosti i na veličinu parazitnih pomaka.

Rad nije objavljen.

Mentor: prof. dr. sc. Saša Zelenika

Povjerenstvo za ocjenu: prof. dr. sc. Dubravka Siminiati
prof. dr. sc. Saša Zelenika
prof. dr. sc. Nenad D. Pavlović

Povjerenstvo za obranu: prof. dr. sc. Dubravka Siminiati
prof. dr. sc. Saša Zelenika
prof. dr. sc. Nenad D. Pavlović

Datum obrane: 20. ožujka 2015.

Datum promocije:

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.
(216, 127, 8, 92, hrvatski jezik)

DD

UDK 621-187.4:621.81-272.3:519.6:539.384/.385(043)

2. Analiza konstrukcijskih parametara rotacijskih
podatljivih mehanizama s lisnatim oprugama

Ključne riječi: podatljivi mehanizam

I Marković, K.
II Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

podatljivi mehanizam
lisnata opruga
nelinearni model
preciznost i točnost
parazitni pomaci
rotacijska krutost
optimizacija konstrukcijske konfiguracije

ANALYSIS OF INFLUENCING PARAMETERS IN THE DESIGN OF CROSS – SPRING PIVOTS

Kristina Marković

University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Keywords: compliant mechanism
spring-strip
nonlinear model
accuracy and precision
parasitic motions
rotational stiffness
optimisation of design configuration

Summary:

Parameters influencing the design of different configurations of cross-spring pivots are analysed in this doctoral thesis. In fact, the main goals in their design are: achieving the highest possible accuracy and precision, achieving the lowest possible variability of rotational stiffness, stability, design simplicity and reliability. Since the considered mechanisms are constituted by spring-strips, the prediction of their behaviour is to be based on the analysis of the characteristic parameters of the strips themselves. In order to analyse the influencing parameters in the design of symmetrical cross-spring pivots loaded by a pure couple, an analytical model of the behaviour of spring-strips in the field of large (geometrically nonlinear) deflections based on the Elastica method, as well as a numerical model based on the finite elements method, are hence developed in the thesis. In order to assess the applicability of the developed numerical model in predicting the stress-strain behaviour of the considered mechanisms, results obtained numerically are compared with experimental data available in literature. With the goal of determining the limits of applicability of the approximated calculation methods depending on the needed accuracy, the results of the analytical calculations of the stress-strain behaviour of the cross-spring pivots are then compared with results obtained by using the finite element method. Numerical calculations are used next to optimise pivots' design by assessing the influence of the angle and the position of the intersection as well as of the initial curvature of the spring-strips,. A design solution allowing the minimisation of the parasitic shifts, as well as the minimisation of variability of the rotational stiffness, even for large rotations of the pivot is thus obtained. At the end of the thesis, an analysis of the influence of external loads on the variability of rotational stiffness and on the entity of the parasitic shifts is also performed. The results obtained in the doctoral thesis allow thus not only assessing the influence of the design parameters in the design of cross-spring pivots, but also creating the preconditions for the development of a new class of ultra-high precision rotational compliant mechanisms with potentially broad applications in industrial and design praxis.

This thesis has not been published.

Mentor: Prof. dr. sc. Saša Zelenika, D. Sc. M. E.

Reviewers: Prof. dr. sc. Dubravka Siminiati, D. Sc. M. E.
Prof. dr. sc. Saša Zelenika, D. Sc. M. E.
Prof. dr. sc. Nenad D. Pavlović, D. Sc. M. E.

Examiners: Prof. dr. sc. Dubravka Siminiati, D. Sc. M. E.
Prof. dr. sc. Saša Zelenika, D. Sc. M. E.
Prof. dr. sc. Nenad D. Pavlović, D. Sc. M. E.

Oral examination: March 20th, 2015.

Degree conferred:

This thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineering.
(216, 127, 8, 92, Croatian language)

DD

I. Analysis of influencing parameters
in the design of cross-spring pivots

I Marković, K.
II University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Keywords:

compliant mechanism
spring-strip
nonlinear model
accuracy and precision
parasitic motions
rotational stiffness
optimisation of design configuration

UDK 621-187.4:621.81-272.3:519.6:539.384/.385(043)